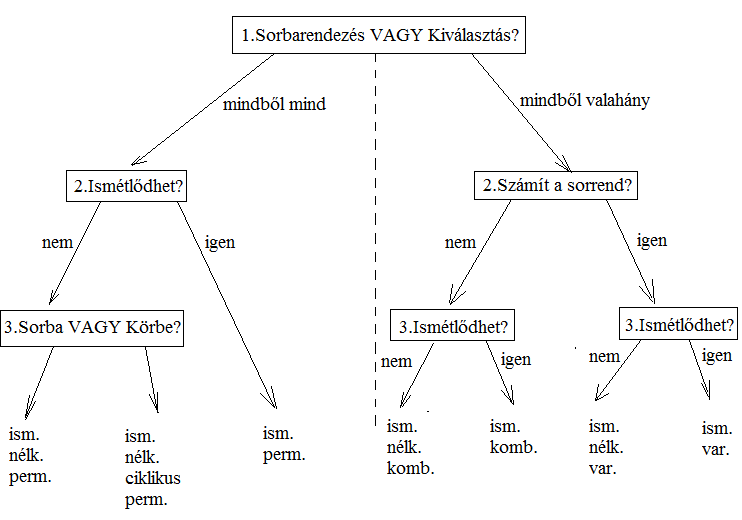
KOMBINATORIKA (elméleti leíró rész a függvénytáblázat 12.-13.-14.oldalán)

A kombinatorika témakör két alapvető feladata: az összes lehetséges sorbarendezések számának meghatározása, illetve bizonyos feltételeknek eleget tevő összes lehetséges kiválasztások számának meghatározása. A feladatok szövegében lévő információk alapján ez minden esetben egyértelműen eldönthető, ezt segíti a következő áttekintő ábra:



A kombinatorika témakör két alapvető feladata: az összes lehetséges sorbarendezések számának meghatározása, illetve bizonyos feltételeknek eleget tevő összes lehetséges kiválasztások számának meghatározása. Ábra:

Első kérdés: *sorbarendezés vagy kiválasztás?* Ha arra következtetünk, minden megadott elemet figyelembe kell venni azokat az összes lehetséges módon, akkor sorbarendezünk, pl. egy osztály „tornasora” vagy valahány betűből, számból készíthető szavak/számok száma. Ha arra következtetünk, hogy a megadott elemek közül csak valahánnyal/néhánnyal kell foglalkoznunk az összes lehetséges módon, akkor kiválasztunk, pl. egy osztályból kisorsolt személyek, vagy megadott betűkből/számokból bizonyos feltételeknek eleget tevő szavak vagy számok készítése. Ha az első kérdésre válaszunk: sorbarendezés, akkor az összes lehetséges sorbarendezések számának meghatározásához a második kérdésnek annak kell lennie: *előfordul-e ismétlődés?* Ha a feladat szövege nem hangsúlyozza ki, akkor különböző tárgyakat feltételezünk, vagy a megadott személyeket akkor is különbözőnek tekintjük, hogyha előfordul ismétlődő nevű személy (Kis Aladár és Nagy Aladár különböző személyek), vagy megadott számjegyek esetén számolunk így, ha azok mind különböző számjegyek. Az „” darab különböző elem esetén a harmadik kérdés: *sor mentén vagy kör mentén?* Abban az esetben, ha az osztály tanulóit „tornasorba” állítjuk vagy a moziban egymás melletti helyekre foglalnak helyet vagy egymás után lépnek be egy ajtón vagy ha a megadott (különböző) betűkből/számokból a megadott karakterek darabszámával megegyező szót/számot készítünk, stb… akkor sorbarendezés történik. Ez az ismétlés nélküli permutáció. Jele: (a jobb alsó indexben a sorbarendezendő elemek darabszámát adjuk meg) és az összes lehetséges sorbarendezések száma: (ezt olvassuk „ faktoriális”-nak, definíció tekintetében pedig a megadott pozitív egész szám előtti összes természetes számot összeszorozzuk -ig, tehát ez egy „” darab szorzótényezőből álló szorzat). Pl. személy esetén vagy az betűkből készíthető ötbetűs szavak száma vagy az számjegyekből készíthető ötjegyű számok darabszámát határozzuk meg, akkor . Utóbbi példában különös figyelmet kell fordítanunk arra, ha a megadott számjegyek között szerepel a számjegy, ugyanis ekkor nem kerülhet az első helyiértékre. Ilyenkor szoktuk alkalmazni a komplementer módszert, tehát az összes lehetőség számából kivonjuk a rosszakat, vagyis azokat, amelyek számát úgy határozhatjuk meg, ha direktben az első számjegy helyére rögzítjük a számjegyet. Ekkor a kedvező/jó esetek száma: . Az egyszerű sorbarendezési feladatok még annyival bonyolíthatók, ha valamely további megszorító feltételek vannak a feladat szövegében. Pl. ha házaspár foglal helyet a moziban úgy, hogy a házastársak egymás mellett ülnek, akkor előbb a házaspárok összes lehetséges sorbarendezését határozzuk meg, ez féleképp történhet, utána figyelembe kell venni, hogy az egyes házastársak egymás mellett helyet cserélve továbbra is teljesítik a kért feltételt, így az első házaspár miatt is, és a második- és harmadik házaspár miatt is szoroznunk kell -vel, így a lehetőségek száma. A feladat szövege úgy is fogalmazhat, hogy a férfiak-nők felváltva foglaljanak helyet, ekkor lehetőség adódik, ha pedig az a feltétel, hogy a férfi egymás mellett, illetve nő egymás mellett, akkor a lehetőségek száma, ugyanis a férfiak-nők és nők-férfiak sorrend is teljesíti a feltételt. Abban az esetben, ha az osztály tanulói egy nagy kör alakú asztal köré ülnek le, vagy ha gyöngyöt fűzünk karláncra vagy ha autók haladnak egy körforgalomban stb… akkor körberendezés történik. Ez az ismétlés nélküli ciklikus permutáció. Jele: (a jobb alsó indexben a sorbarendezendő elemek darabszámát adjuk meg) és az összes lehetséges körberendezések száma: Pl. személy a kör alakú asztal körüli ültetéseinek száma vagy az betűk kör menti körberendezéseiből készíthető „emblémák” száma (mert ekkor nem szavakat készítünk) vagy az számjegyek kör menti körberendezéseiből készített elrendezések darabszámát határozzuk meg, akkor . Abban az esetben, ha pl. az osztály tanulói között előfordulnak megegyező keresztnevűek (és minket nem a személyek, hanem csak keresztneveik kezdőbetűi érdekelnek) vagy ha a megadott betűkészletben van ismétlődő vagy a megadott számjegyek között legalább legalább kétszer előfordul, stb… akkor a sorbarendezés ismétléssel történik. Ez az ismétléses permutáció. jele: (a jobb alsó indexben a sorbarendezendő elemek darabszámát adjuk meg, a jobb felső indexben az ismétlődő elemek ismétléseinek számát adjuk meg, amely indexek összege legfeljebb „” lehet) és az összes lehetséges sorbarendezések száma: (az összes esetet leosszuk az ismétlődő/megkülönböztethetetlen elemek sorbarendezéseinek szorzatával.) Pl. a betűkből készíthető betűs szavak száma esetén, mivel betű szerepel a felsorolásban, ezért az összes lehetőség: . Megjegyzés: ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az számjegyekből készíthető jegyű számokat készítünk, mert közvetlenül kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető a betűk illetve a számjegyek között. Ez a feladattípus azzal bonyolítható, ha a megadott számjegyek közé odasorolunk -ás számjegyet, ekkor, ha pl. az egy alkalommal előforduló -es számjegyet helyettesítjük, akkor a korábbiakban ismertetett komplementer elv alapján: (ahol „rossz”-nak minősülnek azok az esetek, ahol az első számjegy helyére direktben a számjegyet fixáljuk) Ha a megadott számjegyek esetén nem a -es számjegy helyére (tehát nem -ás), hanem a háromszor előforduló -es számjegy helyére írjuk, akkor az első helyiértékre rögzített -ás számjegy miatt már nem lesz jegyű, de ekkor figyelembe kell venni azt is, hogy már csak ismétlődő számjegy fordul elő, így:

(Valamint nagyon szélsőséges, ha ismétlődő karaktereket, pl. helyezünk el kör mentén, ekkor: .)

Ha a feladat szövegéből az első kérdésre a válaszunk az, hogy kiválasztás, akkor az összes lehetséges kiválasztások

számának meghatározásához a második kérdés: *számít-e a kiválasztott elemek sorrendje?* Ez az alapvető különbség a két lehetséges kiválasztási módszer között. Abban az esetben, ha a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor a kiválasztás kombináció (ilyen pl. a lottósorsolás), ha pedig a kiválasztott elemek sorrendje igenis számít, akkor a kiválasztás variáció (ilyen pl. ha egy versenyen csak a dobogós befutók száma számít). Akár kombináció, akár variáció a kiválasztás a harmadik kérdés: *előfordul-e ismétlődés?* Abban az esetben, ha „” különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor ez az ismétlés nélküli kombináció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma). Az összes lehetséges kiválasztások száma: ezt az utóbbi formulát olvassuk „ alatt ”-nak. Pl. az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol egyforma függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki legfeljebb ajándékot kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű/alakú/anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket anélkül, hogy az egyszer kiválasztott cetlit visszatennénk.) Ilyenkor az „egyforma” könyv fogalom szokott félreérthető lenni, de ebben az esetben nem az egyforma függvény-táblázatok döntik el a feladatot, hanem az, hogy biztosan különböző személy közül választunk ötöt. Ekkor az egyforma könyv feltételt úgy értelmezzük, hogy azokat nem tudjuk megkülönböztetni és teljesen mindegy milyen sorrendben adom át a kiválasztott személyeknek, ugyanúgy mint a lottó-sorsoláson amikor egyforma méretű/színű golyókat húznak ki a dobozból. Tehát személy között egyforma ajándékot féleképp sorsolhatunk ki. Egy másik gyakori példa az ismétlés nélküli kombinációra, ha magyar/francia kártyapakliból választunk ki valahányat, amelyek valamilyen megszorító feltételnek kell, hogy eleget tegyenek. Pl. úgy veszünk ki lapot, hogy közöttük van két azonos figura vagy két azonos színű vagy, hogy közöttük legalább két azonos figura/szín forduljon elő. Legyen a feladatunk annak meghatározása: hányféleképp tudunk kivenni a magyar kártyapakliból lapot úgy, hogy közöttük legalább piros legyen? A feladat szövegében szereplő legalább feltétel azt jelenti, hogy 1.eset: pontosan piros ÉS nem piros lapot választunk, ezt: féleképp tehetjük meg; 2.eset: pontosan piros lapot választunk, ezt: féleképp tehetjük meg. A „vagy” miatt a kedvező esetek:

Itt azonnal meg kell említeni egy másik lehetséges megoldást, (amely nem hibás, csak nagy körültekintést igényel), ha azt mondjuk, hogy féleképp kiválasztunk a piros lapok közül kettőt, ezután a maradék lapból választunk továbbit és ez lefedi azokat az eseteket is, amikor nem piros a harmadik lap vagy piros lap a harmadik is. Igenám, csakhogy ekkor a kedvező esetek száma:

amely azt jelenti, hogy bizonyos eseteket ilyenkor többször is számolunk. Természetesen azok között lesz ismétlődés, amikor ténylegesen piros lapot választunk. Figyelembe kell venni, hányféleképp választhatunk ki piros lap közül piros lapot, majd azt, hogy a kiválasztott piros lap közül melyik kettőt választjuk elsőnek, tehát így:

alakban számolunk. A képlet működésére javasolt egy kevesebb elemből álló mintán történő lekövetés. Megjegyzés: abban az esetben, ha a feladat szövegében nincs benne, hogy melyik legyen az a szín, amelyikből legyen legalább azonos, akkor az előző eredményt még szorozzuk -gyel, hiszen nem csak a piros ismétlődhet.

Abban az esetben, ha „” nem feltétlenül különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor ez az ismétléses kombináció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma illetve az „” betű amivel az ismétlést jelöljük). Az összes lehetséges kiválasztások száma: Figyelem: az ismétléses kombináció nem középszint! Az előző példáknál maradva: az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol egyforma függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki több ajándékot is kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű / alakú / anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket, de minden egyes húzás után a kihúzott nevet visszarakjuk a kalapba.) Mivel egyforma függvény-táblázatok kerülnek kisorsolásra, így ez kevésbé életszerű, ugyanúgy mint a lottó-sorsolás is, mert akkor az azt jelentené, hogy úgy veszik a dobozból a nyerőszámokat, hogy a kihúzás után azt visszateszik, vagy úgy, hogy már eleve vannak ismétlődő számok a dobozban és utána már nem teszik vissza a dobozba a kihúzott számokat (az pedig pláne, ha eleve vannak ismétlődő számok, majd a kihúzott számot visszarakják.). Az ismétléses kombináció leginkább életszerű példája lehet, ha a tanító tanár a fős csoport minden tagjának kisorsol pl. különböző könyv közül egyet. (Ekkor feltételezzük, hogy mind az különböző könyvből rendelkezésre áll ). Az összes lehetséges kiválasztások száma: . Figyelem: az ismétléses kombináció nem középszint!

Abban az esetben, ha „” különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje számít, akkor ez az ismétlés nélküli variáció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma). Az összes lehetséges kiválasztások száma: Pl. az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol különböző függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki legfeljebb ajándékot kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű/alakú/anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket anélkül, hogy az egyszer kiválasztott cetlit visszatennénk.) Ilyenkor a „különböző” könyv feltétel miatt is biztosak lehetünk abban, hogy a kiválasztott elemek sorrendje számít. Tehát személy között különböző ajándékot féleképp sorsolhatunk ki. (A lottósorsolás azért lenne erre rossz példa, mert csak akkor lehetne valakinek telitalálatos szelvénye, ha azokat ugyanolyan sorrendben jelölte szelvényén, amilyen sorrendben a nyerőszámokat kihúzták a dobozból.) Sokkal inkább életszerű erre, ha pl. az úszó VB döntőjében induló esetén hányféleképp alakulhatnak a dobogós helyezések, ha feltételezzük, hogy nincs holtverseny: . Abban az esetben, ha „” nem feltétlenül különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje számít, akkor ez az ismétléses variáció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma illetve az „” betű amivel az ismétlést jelöljük). Az összes lehetséges kiválasztások száma: . Az előző példáknál maradva: az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol különböző függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki több ajándékot is kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű/alakú/anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket, de minden egyes húzás után a kihúzott nevet visszarakjuk a kalapba.)

Az összes lehetséges kiválasztások száma: . Egy másik hétköznapi példa, amely alapján könnyen megjegyezhető az ismétléses variáció, ha pl. egy szabályos hatoldalú dobókockával dobunk egymás után négyszer és a kapott értékekből négyjegyű számokat készítünk. Ekkor ugyanis minden dobásnál különböző lehetséges érték közül választunk egyet, amelyek esetén nem zárja ki az egyik -os dobás a másikat. Ekkor az így készíthető négyjegyű számok száma.

Tehát ahogyan az ábrából kiolvasható: az első kérdésnek minden esetben annak eldöntése, hogy sorbarendezésről vagy kiválasztásról van szó. Abban az esetben, ha a feladat szövegéből arra következtetünk, hogy minden megadott elemet figyelembe kell venni azokat az összes lehetséges módon, akkor sorbarendezünk. Ilyen pl. egy osztály „tornasora” vagy valahány betűből, számból készíthető szavak/számok száma. Abban az esetben, ha a feladat szövegéből arra következtetünk, hogy a megadott elemek közül csak valahánnyal/néhánnyal kell foglalkoznunk az összes lehetséges módon, akkor kiválasztunk. Ilyen pl. egy osztályból kisorsolt személyek, vagy megadott betűkből/számokból bizonyos feltételeknek eleget tevő szavak vagy számok készítése.

Ha a feladat szövegéből az első kérdésre a válaszunk az, hogy sorbarendezés, akkor az összes lehetséges sorbarendezések számának meghatározásához a második kérdésnek annak kell lennie: a megadott elemek között előfordul-e ismétlődés. Ha a feladat szövege nem hangsúlyozza ki, akkor különböző tárgyakat feltételezünk, vagy a megadott személyeket akkor is különbözőnek tekintjük, hogyha előfordul ismétlődő nevű személy (mert Kis Aladár és Nagy Aladár nem ugyanaz a személy), vagy megadott számjegyek esetén számolunk így, ha azok mind különböző számjegyek. Az „” darab különböző elem esetén a harmadik kérdésnek végül annak kell lennie, hogy sor mentén sorbarendezünk vagy kör mentén körberendezünk.

Abban az esetben, ha az osztály tanulóit „tornasorba” állítjuk vagy a moziban egymás melletti helyekre foglalnak helyet vagy egymás után lépnek be egy ajtón vagy ha a megadott (különböző) betűkből/számokból a megadott karakterek darabszámával megegyező szót/számot készítünk, stb… akkor a sorbarendezés sor mentén történik.

Ez az ismétlés nélküli permutáció. Jele: (a jobb alsó indexben a sorbarendezendő elemek darabszámát adjuk meg) és az összes lehetséges sorbarendezések száma: (ezt olvassuk „ faktoriális”-nak, definíció tekintetében pedig a megadott pozitív egész szám előtti összes természetes számot összeszorozzuk -ig, tehát ez egy „” darab szorzótényezőből álló szorzat.

Pl. személy esetén vagy az betűkből készíthető ötbetűs szavak száma vagy az számjegyekből készíthető ötjegyű számok darabszámát határozzuk meg, akkor

(Utóbbi példában különös figyelmet kell fordítanunk arra, ha a megadott számjegyek között szerepel a számjegy, ugyanis ekkor nem kerülhet az első helyiértékre. Ilyenkor szoktuk alkalmazni a komplementer módszert, tehát az összes lehetőség számából kivonjuk a rosszakat, vagyis azokat, amelyek számát úgy határozhatjuk meg, ha direktben az első számjegy helyére rögzítjük a számjegyet. Ekkor a kedvező/jó esetek száma: .)

Az egyszerű sorbarendezési feladatok még annyival bonyolíthatók, ha valamely további megszorító feltételek vannak a feladat szövegében. Pl. ha házaspár foglal helyet a moziban úgy, hogy a házastársak egymás mellett ülnek, akkor előbb a házaspárok összes lehetséges sorbarendezését határozzuk meg, ez féleképp történhet utána, figyelembe kell venni, hogy az egyes házastársak egymás mellett helyet cserélve továbbra is teljesítik a kért feltételt, így az első házaspár miatt is, és a második- és harmadik házaspár miatt is szoroznunk kell -vel, így a lehetőségek száma.

A feladat szövege úgy is fogalmazhat, hogy a férfiak-nők felváltva foglaljanak helyet, ekkor lehetőség adódik, ha pedig az a feltétel, hogy a férfi egymás mellett, illetve nő egymás mellett, akkor a lehetőségek száma, ugyanis a férfiak-nők és nők-férfiak sorrend is teljesíti a feltételt.

Abban az esetben, ha az osztály tanulói egy nagy kör alakú asztal köré ülnek le, vagy ha gyöngyöt fűzünk karláncra vagy ha autók haladnak egy körforgalomban stb… akkor a sorbarendezés kör mentén történik.

Ez az ismétlés nélküli ciklikus permutáció. Jele: (a jobb alsó indexben a sorbarendezendő elemek darabszámát adjuk meg) és az összes lehetséges körberendezések száma:

Pl. személy a kör alakú asztal körüli ültetéseinek száma vagy az betűk kör menti körberendezéseiből készíthető „emblémák” száma (mert ekkor nem szavakat készítünk) vagy az számjegyek kör menti körberendezéseiből készített elrendezések darabszámát határozzuk meg, akkor

Abban az esetben, ha pl. az osztály tanulói között előfordulnak megegyező keresztnevűek (és minket nem a személyek, hanem csak keresztneveik kezdőbetűi érdekelnek) vagy ha a megadott betűkészletben van ismétlődő vagy a megadott számjegyek között legalább legalább kétszer előfordul, stb… akkor a sorbarendezés ismétléssel történik.

Ez az ismétléses permutáció. jele: (a jobb alsó indexben a sorbarendezendő elemek darabszámát adjuk meg, a jobb felső indexben az ismétlődő elemek ismétléseinek számát adjuk meg, amely indexek összege legfeljebb „” lehet) és az összes lehetséges sorbarendezések száma:

(Fontos, hogy az összes esetet leosszuk az ismétlődő/megkülönböztethetetlen elemek sorbarendezéseinek szorzatával.)

Pl. a betűkből készíthető betűs szavak száma esetén, mivel betű szerepel a felsorolásban, ezért az összes lehetőség:

Megjegyzés: ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az számjegyekből készíthető jegyű számokat készítünk, mert közvetlenül kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető a betűk illetve a számjegyek között.

Ez a feladattípus azzal bonyolítható, ha a megadott számjegyek közé odasorolunk -ás számjegyet, ekkor, ha pl. az egy alkalommal előforduló -es számjegyet helyettesítjük, akkor a korábbiakban ismertetett komplementer elv alapján:

(ahol „rossz”-nak minősülnek azok az esetek, ahol az első számjegy helyére direktben a számjegyet fixáljuk)

Ha a megadott számjegyek esetén nem a -es számjegy helyére (tehát nem -ás), hanem a háromszor előforduló -es számjegy helyére írjuk, akkor az első helyiértékre rögzített -ás számjegy miatt már nem lesz jegyű, de ekkor figyelembe kell venni azt is, hogy már csak ismétlődő számjegy fordul elő, így:

(Valamint nagyon szélsőséges, ha ismétlődő karaktereket, pl. helyezünk el kör mentén, ekkor: .)

Ha a feladat szövegéből az első kérdésre a válaszunk az, hogy kiválasztás, akkor az összes lehetséges kiválasztások

számának meghatározásához a második kérdésnek annak kell lennie: számít-e a kiválasztott elemek sorrendje.

Ez az alapvető különbség a két lehetséges kiválasztási módszer között. Abban az esetben, ha a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor a kiválasztás kombináció (ilyen pl. a lottósorsolás), ha pedig a kiválasztott elemek sorrendje igenis számít, akkor a kiválasztás variáció (ilyen pl. ha egy versenyen csak a dobogós befutók száma számít).

Akár kombináció, akár variáció a kiválasztás a harmadik kérdésnek annak kell lennie: előfordul-e ismétlődés.

Abban az esetben, ha „” különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor ez az ismétlés nélküli kombináció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma). Az összes lehetséges kiválasztások száma:

ezt az utóbbi formulát olvassuk „ alatt ”-nak.

Pl. az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol egyforma függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki legfeljebb ajándékot kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű/alakú/anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket anélkül, hogy az egyszer kiválasztott cetlit visszatennénk.)

Ilyenkor az „egyforma” könyv fogalom szokott félreérthető lenni, de ebben az esetben nem az egyforma függvény-táblázatok döntik el a feladatot, hanem az, hogy biztosan különböző személy közül választunk ötöt.

Ekkor az egyforma könyv feltételt úgy értelmezzük, hogy azokat nem tudjuk megkülönböztetni és teljesen mindegy milyen sorrendben adom át a kiválasztott személyeknek, ugyanúgy mint a lottó-sorsoláson amikor egyforma méretű/színű golyókat húznak ki a dobozból.

Tehát személy között egyforma ajándékot féleképp sorsolhatunk ki.

Egy másik gyakori példa az ismétlés nélküli kombinációra, ha magyar/francia kártyapakliból választunk ki valahányat, amelyek valamilyen megszorító feltételnek kell, hogy eleget tegyenek. Pl. úgy veszünk ki lapot, hogy közöttük van két azonos figura vagy két azonos színű vagy hogy közöttük legalább két azonos figura/szín forduljon elő.

Legyen a feladatunk annak meghatározása: hányféleképp tudunk kivenni a magyar kártyapakliból lapot úgy, hogy közöttük legalább piros legyen?

A feladat szövegében szereplő legalább feltétel azt jelenti, hogy

1.eset: pontosan piros ÉS nem piros lapot választunk, ezt: féleképp tehetjük meg;

2.eset: pontosan piros lapot választunk, ezt: féleképp tehetjük meg.

Az esetek közötti „vagy” kötőszó miatt a kedvező esetek száma:

Itt azonnal meg kell említeni egy másik lehetséges megoldást, (amely nem hibás, csak nagy körültekintést igényel), ha azt mondjuk, hogy féleképp kiválasztunk a piros lapok közül kettőt, ezután a maradék lapból választunk továbbit és ez lefedi azokat az eseteket is, amikor nem piros a harmadik lap vagy piros lap a harmadik is. Igenám, csakhogy ekkor a kedvező esetek száma: amely azt jelenti, hogy bizonyos eseteket ilyenkor többször is számolunk. Természetesen azok között lesz ismétlődés, amikor ténylegesen piros lapot választunk. Figyelembe kell venni, hányféleképp választhatunk ki piros lap közül piros lapot, majd azt, hogy a kiválasztott piros lap közül melyik kettőt választjuk elsőnek, tehát így: alakban számolunk.

A képlet működésére javasolt egy kevesebb elemből álló mintán történő lekövetés.

Megjegyzés: abban az esetben, ha a feladat szövegében nincs benne, hogy melyik legyen az a szín, amelyikből legyen legalább azonos, akkor az előző eredményt még szorozzuk -gyel, hiszen nem csak a piros ismétlődhet.

Abban az esetben, ha „” nem feltétlenül különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, akkor ez az ismétléses kombináció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma illetve az „” betű amivel az ismétlést jelöljük).

Az összes lehetséges kiválasztások száma: Figyelem: az ismétléses kombináció nem középszint!

Az előző példáknál maradva: az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol egyforma függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki több ajándékot is kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű/alakú/anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket, de minden egyes húzás után a kihúzott nevet visszarakjuk a kalapba.) Mivel egyforma függvény-táblázatok kerülnek kisorsolásra, így ez kevésbé életszerű, ugyanúgy mint a lottó-sorsolás is, mert akkor az azt jelentené, hogy úgy veszik a dobozból a nyerőszámokat, hogy a kihúzás után azt visszateszik, vagy úgy, hogy már eleve vannak ismétlődő számok a dobozban és utána már nem teszik vissza a dobozba a kihúzott számokat (az pedig pláne, ha eleve vannak ismétlődő számok, majd a kihúzott számot visszarakják.). Az ismétléses kombináció leginkább életszerű példája lehet, ha a tanító tanár a fős csoport minden tagjának kisorsol pl. különböző könyv közül egyet.

(Ekkor feltételezzük, hogy mind az különböző könyvből rendelkezésre áll .)

Az összes lehetséges kiválasztások száma:

Figyelem: az ismétléses kombináció nem középszint!

Abban az esetben, ha „” különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje számít, akkor ez az ismétlés nélküli variáció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma). Az összes lehetséges kiválasztások száma:

Pl. az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol különböző függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki legfeljebb ajándékot kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű/alakú/anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket anélkül, hogy az egyszer kiválasztott cetlit visszatennénk.)

Ilyenkor a „különböző” könyv feltétel miatt is biztosak lehetünk abban, hogy a kiválasztott elemek sorrendje számít.

Tehát személy között különböző ajándékot féleképp sorsolhatunk ki.

(A lottósorsolás azért lenne erre rossz példa, mert csak akkor lehetne valakinek telitalálatos szelvénye, ha azokat ugyanolyan sorrendben jelölte szelvényén, amilyen sorrendben a nyerőszámokat kihúzták a dobozból.)

Sokkal inkább életszerű erre, ha pl. az úszó VB döntőjében induló esetén hányféleképp alakulhatnak a dobogós helyezések, ha feltételezzük, hogy nincs holtverseny:

Abban az esetben, ha „” nem feltétlenül különböző elem közül választunk ki „” darabot úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje számít, akkor ez az ismétléses variáció. Jele: (a jobb alsó indexben az összes elemek száma, a jobb felső indexben a kiválasztandó elemek száma illetve az „” betű amivel az ismétlést jelöljük).

Az összes lehetséges kiválasztások száma: .

Az előző példáknál maradva: az óperencián túli fős 11.C osztály matematika csoportjában a tanító tanár (mert a kimagasló évvégi eredmények miatt nem tudja objektívan eldönteni, ezért) ajándékként kisorsol különböző függvény-táblázatot úgy, hogy mindenki több ajándékot is kaphat. (A sorsolást úgy végezzük, hogy a csoport tagjainak neveit felírjuk egy-egy ugyanolyan méretű/alakú/anyagú papírcetlire, amelyeket bedobunk egy kalapba és abból véletlenszerűen húzzuk ki a neveket, de minden egyes húzás után a kihúzott nevet visszarakjuk a kalapba.)

Az összes lehetséges kiválasztások száma: .

Egy másik hétköznapi példa, amely alapján könnyen megjegyezhető az ismétléses variáció, ha pl. egy szabályos hatoldalú dobókockával dobunk egymás után négyszer és a kapott értékekből négyjegyű számokat készítünk. Ekkor ugyanis minden dobásnál különböző lehetséges érték közül választunk egyet, amelyek esetén nem zárja ki az egyik -os dobás a másikat. Ekkor az így készíthető négyjegyű számok száma.

Kombinatorika feladatok megoldásakor előfordulhat, hogy ismételt kiválasztást kell végezzünk. Ekkor az egyes kiválasztások között „és” kötőszó értendő, amely miatt a külön-külön számolt lehetséges kiválasztásokat összeszorozzuk.

Például: Hányféleképp lehetséges 12személyt 3darab 4fős csoportba osztani?

1.kiválasztás: ekkor 12 személy közül választjuk ki az első 4főt (mivel a feladat szövege nem említi, hogy bármi „fontossági” sorrend lenne, így a kiválasztás a sorrend figyelembevétele nélkül történik), tehát:

2.kiválasztás: ekkor már csak a visszamaradó 8 személy közül választunk újabb 4főt, ezt

3.kiválasztás: ekkor, a visszamaradó 4személy lesz a harmadik csoport.

Tehát az összes lehetséges csoportba sorolások száma:

Egy másik érdekes feladattípus, amikor „visszafelé” kell számolnunk.

Például: Hány fős az a társaság, amelyben, ha mindenki mindenkivel pontosan egyszer kezet fog akkor 190db kézfogás történik?

Jelöljük a társaság létszámát „”-nel, ekkor a kombinatorika nyelvére átkonvertálva a feladat szövegét:

Mivel egy kézfogásban 2személy vesz részt, így az a kérdés: Hány fő közül tudunk kiválasztani 2főt 190 féleképpen?

A számlálóban lévő definíció szerint egy „” darab szorzótényezőből álló szorzat, ahol az „” szám előtti összes természetes számot szorozzuk 1-ig. Illetve a nevezőben lévő definíció szerint egy „” darab szorzótényezőből álló szorzat, ahol az „” szám előtti összes természetes számot szorozzuk 1-ig.

Ha egy tört számlálójában és nevezőjében vannak megegyező szorzótényezők, akkor azzal egyszerűsíthetünk, tehát:

Megjegyzés: az ilyen jellegű feladatok esetén, a lehetséges egyszerűsítés után mindig ez a tört marad vissza, innen:

A feladat egyik lehetséges megoldása innen, ha zárójelet bontunk majd csökkenő hatvány szerint 0-ra rendezünk, leolvassuk az együtthatókat és helyettesítünk a másodfokú egyenlet megoldóképletébe.

A másik lehetséges megoldás esetén felhasználjuk, hogy a társaságban lévő személyek száma kizárólag pozitív egész szám lehet, így elegendő a számelméletnél megismert prímtényezőkre bontás után olyan kéttényezős szorzat kialakítása, ahol a szorzótényezők különbsége 1, tehát:

Véges sok lehetőség van, ahogyan a prímtényezős felbontásban lévő tényezőket csoportosíthatjuk, így ráakadunk:

Tehát 20fős az a csoport, amelyben az összes lehetséges kézfogások száma 190.

Megjegyzés1: ugyanígy történik a feladat megoldása, ha nem egy társaság létszámát keressük, hanem pl. egy egyfordulós labdarúgó torna alkalmával ismert az összes lejátszandó meccsek száma, ugyanis ekkor szintén elmondható, hogy egy meccsen 2csapat vesz részt.

Megjegyzés2: abban az esetben, ha foci-torna szövegkörnyezetről tesz említést a feladat, de nem egyfordulós, hanem kétfordulós körmérkőzéses tornát játszanak (tehát van odavágó és visszavágó), akkor az ismétlés nélküli kombinációs kiválasztások számát nem osztjuk 2-vel, csak az kéttényezős szorzatot tesszük egyenlővé a megadott értékkel.

Megjegyzés3: akkor is hasonló a feladat megoldása, ha a következő lehetőségeknek megfelelően teszi fel a kérdést:

Adott a síkban 10db pont, amelyek közül semelyik 3db nem esik egy egyenesre. Legfeljebb hány egyenest határozhat meg ez 10pont? Mivel 2db különböző pontra egyetlen egyenes illeszthető, így a lehetséges egyenesek száma:

Adott a síkban „n” db pont, amelyek közül semelyik 3db nem esik egy egyenesre. Hány darab pontot adtunk meg, ha összesen 66db egyenest határoznak meg? Ekkor az a megoldandó egyenlet.

Adott a térben 10db pont, amelyek közül semelyik 4db nem esik egy síkra. Legfeljebb hány síkot határozhat meg ez 10pont? Mivel 3db különböző pontra egyetlen sík illeszthető, így a lehetséges síkok száma:

Adott a síkban „n” db pont, amelyek közül semelyik 4db nem esik egy síkra. Hány darab pontot adtunk meg, ha összesen 220db síkot határoznak meg? Ekkor az a megoldandó egyenlet.

1.Feladat: Egy futóversenyen -an vesznek részt. Hányféle dobogós sorrend lehetséges, ha nincs holtverseny?

2.Feladat: 4 házaspár egymás melletti helyekre vesz jegyet a moziban. Hányféleképp ülhetnek le, ha a házaspárok mindenképp egymás mellett akarnak ülni?

3.Feladat: lány és fiú közül hányféleképp választható ki fő, hogy a kiválasztottak között több lány legyen?

4.Feladat: Sorolja fel a számjegyekből ismétléssel készíthető összes, pontosan kétjegyű számokat!

5.Feladat: Hányféleképp fűzhető fel darab kulcs egy kulcskarikára?

6.Feladat: Hány hatjegyű páros szám készíthető a számjegyekből?

7.Feladat: Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros?

8.Feladat: főt hányféleképp oszthatunk darab fős csoportba?

9.Feladat: A, B, C és D egymás melletti helyekre vesznek jegyet a moziban. Sorolja fel az összes olyan lehetséges ülési sorrendet, amelyben A és B nem ülnek egymás mellett!

10.Feladat: Hány darab legfeljebb jegyű -es számrendszerbeli szám van?

11.Feladat: Egy baráti társaságban üdvözléskor mindenki mindenkivel pontosan egyszer kezet fogott. Hány fős ez a társaság, ha tudjuk, hogy összesen kézfogás történt?

12.Feladat: Egy szabályos pénzérmét egymás után feldobunk alkalommal és felírjuk a dobás kimenetelét (fej; írás). Sorolja fel az összes olyan esetet, amelyben több a fej, mint az írás!

13.Feladat: Hány darab pontosan hatjegyű páratlan szám készíthető a számjegyekből?

1.Feladat: Hány darab pontosan ötjegyű páros szám készíthető a 0;1;2;3;4;5 számjegyekből, ha minden számjegy legfeljebb egyszer használható?

2.Feladat: Hány darab pontosan hatjegyű páratlan szám készíthető a 0;1;2;3;4;5 számjegyekből?

3.Feladat: Sorolja fel a pontosan kétjegyű 3-mal osztható számokat, amelyek a 0;1;2;3;4;5 számjegyekből készíthetők, ha egy számjegy többször is felhasználható?

4.Feladat: Adottak az 1;2;3;4;5 számjegyek. Hány darab pontosan ötjegyű szám készíthető, amelyekben minden számjegy annyiszor szerepel amennyi az értéke?

5.Feladat: Adottak az 1;2;3;4;5 számjegyek. Hány darab pontosan hatjegyű szám készíthető, amelyekben minden számjegy annyiszor szerepel amennyi az értéke?

6.Feladat: Hány darab 11 betűs nem feltétlenül értelmes szó készíthető a K;U;A;L;A;L;U;M;P;U;R betűkből?

7.Feladat: 10 fő között hányféleképp sorsolható ki 3 ajándék, ha egy személy több ajándékot is kaphat?

8.Feladat: 5lány és 3 fiú közül hányféleképp választható ki 4 fő, hogy a kiválasztottak között több lány legyen?

9.Feladat: Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros?

10.Feladat: 2 házaspár hányféleképp ülhet le egymás mellett a moziban, ha a házastársak egymás mellett szeretnének ülni?

11.Feladat: 32 lapos kártyából hányféleképp választható ki 4 lap, hogy a kiválasztott lapok között ne legyen piros és ne legyen 7es?

12.Feladat: Hány fős az a társaság, amelyben ha mindenki mindenkivel pontosan egyszer kezet fog, akkor 28 kézfogás történik?

13.Feladat: 5 személy hányféleképp ültethető le egy kör alakú asztal köré?

14.Feladat: Szabályos pénzérmével négyszer dobunk. Hány olyan eset lehetséges, amikor megegyező a fejek és írások száma?

1.Kitűzött Házi Feladat: Az 1; 1; 1; 2; 2; 3; 3 számjegyekből hány db „13”-mal kezdődő 7jegyű szám készíthető?

2. Kitűzött Házi Feladat: Hány db 5-tel osztható 4jegyű szám készíthető az 1; 3; 5; 7; 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél 1-1 számjegy csak egyszer szerepelhet?

3. Kitűzött Házi Feladat: Hány db 5-tel osztható 4jegyű szám készíthető az 1; 3; 5; 7; 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél minden számjegy többször is szerepelhet?

4. Kitűzött Házi Feladat: Egy szabályos 6oldalú dobókocka egy oldalára 0-t, két oldalára 1-et és három oldalára 2-t írunk, majd egymás után feldobjuk négyszer és a dobások eredményeit a kapott sorrendben felírjuk. a) Hány db 4jegyű szám készíthető? b) Hány db 1-re végződő 4jegyű számot kaphatunk?

5. Kitűzött Házi Feladat: A 4-es és 5-ös számjegyekből hány db 9-cel osztható a) 8jegyű; b) 9jegyű számot készíthető?

6. Kitűzött Házi Feladat: Az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből hány db 4jegyű szám készíthető, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik?

7. Kitűzött Házi Feladat: Hányféleképp foglalhat helyet egymás mellett 4férfi és 3nő úgy, hogy a nők és a férfiak felváltva következzenek egymás után?

8. Kitűzött Házi Feladat: Hány db 8jegyű szám készíthető a 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1 számkártyákból?

9. Kitűzött Házi Feladat: Hány db rendszámtábla készíthető 26db betű és a 10db számjegy felhasználásával, ha a rendszám előbb 3db betűből utána 3db számjegyből áll? (A „000” számhármasokat tartalmazók nem megengedettek!)

10. Kitűzött Házi Feladat: Hány db olyan különböző számjegyekből álló 4jegyű szám van, amelyben 2db páros és 2db páratlan számjegy van?

11. Kitűzött Házi Feladat: A 32 lapos magyar kártyából leosztottunk 4db lapot. Hány féle, legalább 1db ászt tartalmazó különböző lehetséges leosztás van?

12. Kitűzött Házi Feladat: Az óperencián túli 16fős 11.B csoport 50%-a jeles, 3/8-ada jó, a többiek közepes dolgozatot írtak. A dolgozatok közül véletlenszerűen kiválasztunk 5db-ot. Hányféleképp tehetjük ezt meg, hogy

a) mindegyik 4-es dolgozat?

b) mindegyik 5-ös dolgozat?

c) mindegyik 3-as dolgozat?

d) pontosan 1db 5-ös dolgozat van közöttük?

e) pontosan 1db 4-es dolgozat van közöttük?

f) pontosan 1db 4-es és 1db 5-ös dolgozat van közöttük?

g) pontosan 1db 4-es vagy 1db 5-ös dolgozat van közöttük?

h) pontosan 3db 4-es dolgozat van közöttük?

i) pontosan 4db 5-ös dolgozat van közöttük?

j) 3db 5-ös és 2db 4-es dolgozat legyen?

k) legfeljebb 1db 5-ös dolgozat van közöttük?

l) legalább 1db 5-ös dolgozat van közöttük?

m) legalább 2db 5-ös és legfeljebb 2db 4-es dolgozat van közöttük?

Eseményalgebra

Véletlen jelenségek azok a jelenségek, melyeket az ismert feltételek nem határoznak meg egyértelműen. A jelenségnek ettől még van oka, csak nem tudjuk teljes egészében feltárni. Pl. ha egy pénzérmét feldobunk, nem tudjuk előre, melyik oldalára esik. Kísérletet végzünk, ha egy véletlen jelenséget megfigyelünk. A kísérletet akárhányszor ugyanolyan körülmények között végrehajthatjuk. Pl. a pénzérme feldobásakor lehet, hogy fejet, lehet, hogy írást kapunk. (Sőt az is előfordulhat, hogy az érme az élére esik.) Pontosan meg kell mondanunk, hogy mit tekintünk a kísérlet kimenetelének.

A kísérlet minden eredményéhez kell tartozzon egy egyértelműen meghatározható kimenetel. Pl. a az érme feldobásakor annak az esélye, hogy az érme a élére esik, elhanyagolható, ezért csak azt figyeljük meg, hogy az érmével fejet vagy írást dobtunk. Ezeket nevezzük ebben az esetben a kísérlet lehetséges kimeneteleinek. Elemi eseménynek nevezzük a véletlen jelenségre vonatkozó kísérlet kimenetelét. A kísérlet minden kimeneteléhez tartozik egy-egy elemi esemény.

Pl. a pénzérme esetén „F” - fejet dobunk. (Előfordul olyan eset, amikor az elemi események halmaza nem véges, ilyen

pl. ha egy céltáblára lövünk, mert a céltáblának végtelen sok pontja van. Erről később.) Eseménytérnek nevezzük az elemi események halmazát. Jele: „”. Pl. a pénzérme esetén: . Eseményeknek nevezzük az eseménytér részhalmazait. Egy esemény bekövetkezik, ha a kísérlet kimenetele az eseménynek megfelelő részhalmazba tartozó elemei esemény. Az eseményeket általában nagybetűvel jelöljük. Biztos esemény a „” halmazhoz tartozó esemény, amely mindenképpen bekövetkezik. Lehetetlen esemény, az üres halmazhoz tartozó esemény, amely semmiképpen sem következik be.

Műveletek eseményekkel:

Két esemény egyenlő, ha a kísérlet bármely kimenetele esetén vagy mindkettő bekövetkezik, vagy egyik sem. Az „” esemény komplementere az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, amikor „” nem következik be. Jele: . (Bármely esemény komplementerének komplementere az eredeti esemény: . A biztos esemény komplementere a lehetetlen esemény; a lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény.) Tetszőleges események összege az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, amikor „” vagy „” bekövetkezik. Jele: .

Tétel: Minden esemény előáll elemi események összegeként. Pl. .

Tetszőleges események szorzata az az esemény, amelyik pontosan akkor következik be, amikor „” és „” bekövetkezik. Jele: . Tetszőleges események egymást kizárják, ha egyszerre nem következhetnek be, azaz

Az eseményekre vonatkozó azonosságok:

Kommutativitás: illetve

Asszociativitás: illetve

Disztributivitás: illetve

Elnyelési azonosság: illetve

Lehetetlen esemény: illetve

Biztos esemény: illetve

Komplementer eseményekkel kapcsolatos azonosságok: illetve

De-Morgan azonosságok: illetve

1.Feladat: Dobjunk fel egy szabályos játékkockát. Soroljuk fel az elemi eseményeket, adjuk meg az eseményteret!

Elemi események: -t dobtunk; -t dobtunk; -t dobtunk; -t dobtunk; -t dobtunk; -t dobtunk.

Eseménytér: .

Határozzuk meg a következő eseményeket:

Páros számot dobtunk:

Megjegyzés: ennek komplementere: páratlan számot dobtunk:

Prímszámot dobtunk:

Legalább -t dobtunk:

Legfeljebb -t dobtunk: ebben a feladatban ez a biztos esemény

-et dobtunk: ebben a feladatban ez a lehetetlen esemény.

Például illetve valamint

továbbá

Legyen például az a kísérlet, hogy feldobunk egy dobókockát egymás után alkalommal (kísérlet) és figyeljük a felső lapon lévő számot, amelyeket a dobások sorrendjében mindet felírjuk. Legyen az „” esemény az, hogy -t dobtunk. Abban az esetben, ha az „” esemény alkalommal következik be, akkor azt mondjuk, hogy az „” esemény gyakorisága , és relatív gyakorisága .

Megállapítások a relatív gyakorisági értékekről:

-A relatív gyakoriság nem lehet negatív, mivel és ezért: .

-A biztos esemény relatív gyakorisága és a lehetetlen esemény relatív gyakorisága .

-Egymást kizáró események összegének relatív gyakorisága a tagok relatív gyakoriságainak összege.

Sok hasonló kísérletsorozatot elvégezve megfigyelhetjük, hogy adott esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Minél több kísérletet végzünk, az ingadozás általában egyre kisebb. Adott „” esemény valószínűségének azt a számot tekintjük, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik. Az „” esemény valószínűségének jele: .

A valószínűséget nem definiáljuk, hanem axiómákkal határozzuk meg, melyek a relatív gyakoriság tulajdonságai alapján a tapasztalatnak megfelelően adódnak:

I.axióma: Ha „” tetszőleges esemény, akkor .

II.axióma: .

III.axióma: Ha tetszőleges események, melyekre akkor .

Azokban a példákban, ahol az elemi események egyformán valószínűek, látható, hogy egy esemény relatív gyakorisága annál nagyobb, minél több elemi eseményből áll egy esemény, így az esemény valószínűsége is annál nagyobb lesz, minél több elemi eseményből áll az esemény. A valószínűség klasszikus modellje akkor alkalmazható, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor egy esemény valószínűsége egyenesen arányos az eseményt alkotó elemi események számával:

A gyakorlatban a klasszikus modell feltételei sokszor nem teljesülnek, ezt mindig statisztikai vizsgálatokkal kell ellenőrizni. Előfordulnak olyan esetek, amikor a kedvező esetek számának meghatározásakor megfogalmazzuk az adott esemény komplementer-eseményét, mivel ezért tehát: .

A valószínűségi értéket százalékos alakban is kérdezheti a feladat, ekkor az esély szót használjuk. Ekkor a meghatározott valószínűségi értéket szorozzuk -zal és a kapott értéket továbbra is annyi tizedes jegyre kerekítve adjuk meg, amennyit a feladat szövege előír. Pl. amelyből az esély értéke: .

Természetesen százalékos (esély) értékből is tudunk valószínűségi értéket mondani, ha -zal osztunk. Pl. ha valamely „” esemény esélye akkor valószínűsége:

2.Feladat: Szabályos játékkockával dobunk. Jelöljük „”-val, hogy páros számot dobtunk; „”-vel, hogy prímszámot dobtunk; „”-vel, hogy legalább -t dobtunk. Határozza meg a következő események valószínűségét!

a) Páros számot dobtunk: ezért:

b) Legalább -t dobtunk: ezért:

c) ezért:

d) ezért:

1.Kitűzött Házi Feladat: Andrásnak van egy fekete kalapja, amelyben piros és kék golyó van, és van egy zöld kalapja, amelyben piros és kék golyó van. Bélának is van egy fekete kalapja, amelybe piros és kék golyó van és van egy zöld kalapja, amelybe piros és kék golyó van. Határozza meg a következő események valószínűségét!

-András fekete kalapjából kék golyót húzunk;

-Béla zöld kalapjából piros golyót húzunk;

-András fekete és zöld kalapjának összeöntése után piros golyót húzunk;

-Béla fekete és zöld kalapjának összeöntése után kék golyót húzunk;

-András és Béla fekete kalapjainak összeöntése után piros golyót húzunk;

-András és Béla zöld kalapjainak összeöntése után kék golyót húzunk;

-András fekete és Béla zöld kalapjainak összeöntése után piros golyót húzunk;

-András zöld és Béla fekete kalapjainak összeöntése után kék golyót húzunk;

-András fekete és zöld illetve Béla fekete kalapjainak összeöntése után piros golyót húzunk;

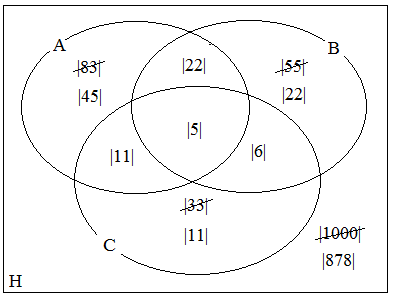
-András zöld illetve Béla fekete és zöld kalapjainak összeöntése után kék golyót húzunk;

-András és Béla fekete és zöld kalapjainak összeöntése után piros golyót húzunk.

2.Feladat: Legyenek adottak a legfeljebb értékű pozitív egész számok halmaza. Jelöljük „”-val közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –vel; jelöljük „”-vel közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –cal;

és jelöljük „”-vel közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –cal. Az alaphalmazból véletlenszerűen kiválasztunk számot. Határozza meg a következő események valószínűségét!

Készítsünk ábrát! (A szükséges Venn-diagram elkészítésének lépéseit az I.Ismétlő leckében található.)



a)Mennyi a valószínűsége annak, hogy olyat választunk, amely egyik részhalmazhoz sem tartozik hozzá?

kedvező: ;

összes: ;

tehát a valószínűség:

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy olyat választunk, amely pontosan az egyik megadott számmal osztható?

kedvező: ;

összes: ;

tehát a valószínűség:

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy olyat választunk, amely pontosan kettő megadott számmal osztható?

kedvező: ;

összes: ;

tehát a valószínűség:

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy olyat választunk, amely legalább kettő megadott számmal osztható?

kedvező: ;

összes: ;

tehát a valószínűség:

e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy olyat választunk, amely legfeljebb az egyik megadott számmal osztható?

kedvező: ;

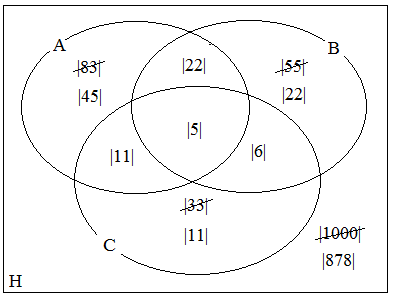
összes: ;

tehát a valószínűség:

3.Feladat: Legyenek adottak a legfeljebb értékű pozitív egész számok halmaza. Jelöljük „”-val közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –vel; jelöljük „”-vel közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –cal;

és jelöljük „”-vel közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –cal. Az alaphalmazból véletlenszerűen kiválasztunk számot. Határozza meg a következő események valószínűségét!

Készítsünk ábrát! (A szükséges Venn-diagram elkészítésének lépéseit az I.Ismétlő leckében található.)



a)Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek egyik részhalmazhoz sem tartozik hozzá?

kedvező: ;

összes: ;

tehát a valószínűség:

b)Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek közül az egyik semelyik részhalmazhoz sem tartozik hozzá, a másik pedig mindhárommal osztható?

kedvező: amelyik egyikkel sem osztható db, amelyik mindhárommal db. Mivel közöttük „és” kötőszó értendő, ezért: ;

összes esetek száma: ;

tehát a valószínűség:

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek közül az egyik pontosan az egyik megadott számmal osztható a másik legalább megadott számmal osztható?

kedvező: amelyik pontosan egyvalamely számmal osztható ; a másik, amely legalább megadott számmal osztható: ; mivel közöttük „és” kötőszó értendő, így

összes: ;

tehát a valószínűség:

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek közül az egyik pontosan kettő megadott számmal osztható a legalább az egyikkel osztható?

kedvező: amelyik pontosan kettő számmal osztható ; a másik, amely legalább az egyikkel osztható: ; mivel közöttük „és” kötőszó értendő, így

összes: ;

tehát a valószínűség:

2.Kitűzött Házi Feladat: Legyenek adottak a legfeljebb értékű nemnegatív egész számok halmaza. Jelöljük „”-val közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –tel; jelöljük „”-vel közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –szal; és jelöljük „”-vel közülük azon elemek halmazát, amelyek oszthatók –gyel.

Ezek közül véletlenszerűen választunk kettőt. Határozza meg a következő események valószínűségét!

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek egyik részhalmazhoz sem tartoznak hozzá?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amely közül az egyik pontosan az egyik megadott számmal osztható a másik egyikkel sem?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek közül az egyik pontosan kettő megadott számmal osztható, a másik legalább kettővel osztható?

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek közül az egyik legalább egy megadott számmal osztható, a másik legfeljebb egyvalamelyikkel osztható?

e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két olyat választunk, amelyek közül az egyik legfeljebb az egyik megadott számmal osztható, a másik egyikkel sem osztható?

4.Feladat: moziba mennek, ahol egymás melletti helyekre vesznek jegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy nem ülnek egymás mellett.

Az az eset, amikor nem ülnek egymás mellett, jónéhány lehetséges sorrendben bekövetkezhet, pl. (a helyeket sorszámmal ellátva -től -ig) ha „” az -es sorszámú helyen ül, „” pedig a -as vagy -es vagy -ös vagy -os sorszámú helyen. Nem lehetetlen ezek lekövetése, csak hosszadalmas, ezért inkább megfogalmazzuk a komplementer eseményt: egymás mellett ülnek. Ekkor ha valamelyikőjüket odébb ültetem, akkor vele együtt ül át a másik is, hogy továbbra is egymás mellett üljenek. Így már csak „személy” összes lehetséges sorrendjét számoljuk, ez

lehetőség, ha a fixált személyek sorrendben ülnek egymás mellett és további lehetőség, ha a fixált személyek sorrendben ülnek egymás mellett. Ez a kedvező esetek száma: , míg az összes esetek száma a személy összes lehetséges sorrendjeinek száma:

Tehát a komplementer esemény valószínűsége: vagyis az eredetileg kérdezett esemény valószínűsége: .

5.Feladat: Mennyi az esélye, hogy a legfeljebb ötjegyű hármas számrendszerbeli számok közül véletlenszerűen kiválasztva egyet, az pontosan háromjegyű?

Összes esetek száma: a hármas számrendszerben minden helyi értékére különböző számjegy kerülhet, így a legfeljebb ötjegyű számok száma ismétléses variációval számolható, mert minden helyiértékre kiválasztás számít úgy, hogy jelentősége van a sorrendnek és előfordulhat az ismétlődés:

Kedvező esetek száma: abban az esetben, ha pontosan háromjegyű számot választunk, akkor nem kezdődhet -ás számjeggyel a maradék két helyiértékre viszont a lehetséges számjegyek közül bármi kerülhet. Ezek száma szintén ismétléses variációval számolható:

A keresett esemény valószínűsége: amelyből az esélye.

6.Feladat: Mennyi az esélye, hogy a legfeljebb ötjegyű hármas számrendszerbeli számok közül véletlenszerűen kiválasztva egyet, az pontosan egy valamely háromszor ismétlődő számjegyet tartalmaz?

Összes esetek száma: a hármas számrendszerben minden helyi értékére különböző számjegy kerülhet, így a legfeljebb ötjegyű számok száma ismétléses variációval számolható, mert minden helyiértékre kiválasztás számít úgy, hogy jelentősége van a sorrendnek és előfordulhat az ismétlődés:

Kedvező esetek számának meghatározásakor esetvizsgálat szükséges, attól függően, hogy a lehetséges számjegyek közül melyik ismétlődik háromszor. Tegyük fel, hogy a -ás számjegy ismétlődik háromszor, ekkor a további két helyiértéken:

1.eset: lehet db -es számjegy, ekkor a megadott db ismétlődő számjegyből az ismétléses permutációval határozhatjuk meg a felírható számok számát:

2.eset: lehet db -es számjegy, ekkor a megadott db ismétlődő számjegyből az ismétléses permutációval határozhatjuk meg a felírható számok számát:

3.eset: lehet db -es és db -es számjegy, ekkor a megadott db ismétlődő számjegyből az ismétléses permutációval határozhatjuk meg a felírható számok számát:

Tehát a -ás számjegy ismétlődésével lehetőség adódik.

Tegyük fel, hogy az -es számjegy ismétlődik háromszor, ekkor a további két helyiértéken az előző gondolatmenet alapján szintén lehetőség adódik, ugyanúgy, mint amikor a -es számjegy ismétlődik háromszor.

A keresett valószínűség: amelyből: az esély.

7.Feladat: A lapos magyar kártyából (amelyben különböző szín mindegyikéből lapos sor van) véletlenszerűen kiveszünk egy lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy

a)piros lapot húztunk?

Összes eset: ahányféleképp kiválasztható lap közül . Ezt ismétlés nélküli kombinációval számolhatjuk:

Kedvező eset: ahányféleképp kiválasztható piros lap közül . Ezt ismétlés nélküli kombinációval számolhatjuk:

A keresett valószínűség:

b)ász lapot húzunk?

Összes eset: ahányféleképp kiválasztható lap közül . Ezt ismétlés nélküli kombinációval számolhatjuk:

Kedvező eset: ahányféleképp kiválasztható ász lap közül . Ezt ismétlés nélküli kombinációval számolhatjuk:

A keresett valószínűség:

8.Feladat: A lapos magyar kártyából (amelyben különböző szín mindegyikéből lapos sor van) véletlenszerűen kiveszünk lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy

a)mind piros lapot húztunk?

kedvező:

összes:

Tehát a keresett valószínűség:

b)elsőre pirosat húzunk az összes többi nem piros?

kedvező: ha elsőre pirosat húzunk azt féleképpen tehetjük meg, ezután, hogy nem lesz piros úgy biztosítható nem pirosak közül választunk további lapot, ezt féleképp tehetjük meg; mivel közöttük „és” kötőszó értendő, így a kedvező esetek száma:

összes:

Tehát a keresett valószínűség:

c)legfeljebb piros?

kedvező: a legfeljebb feltételnek eleget tesz az, ha nincs közöttük piros, illetve az, ha pontosan piros van közöttük.

.eset: nincs közöttük piros, ezt féleképp tehetjük meg;

.eset: pontosan piros van közötte, ezt féleképp tehetjük meg; mivel a kedvező esetek között vagy kötőszó értendő, így a kedvező esetek száma:

összes:

Tehát a keresett valószínűség:

d)legalább piros?

kedvező: a legalább 1 feltételnek eleget tesz, ha pontosan piros van közöttük, ha piros van közöttük, ha 3 piros van közöttük vagy ha mindegyik piros. Nem lehetetlen az esetek vizsgálata, de talán célravezetőbb, ha megfogalmazzuk a komplementer eseményt. Ekkor a komplementer-esemény: legfeljebb piros van közötte, tehát nincs közötte piros.

Ezt féleképp tehetjük meg;

összes:

Tehát a komplementer esemény valószínűsége:

Így a keresett esemény valószínűsége:

e)pontosan piros és pontosan zöld legyenek a kihúzott lapok?

kedvező: a 2 db piros lapot illetve a 2 db zöld lapot féleképp tehetjük meg, mivel közöttük „és” kötőszó értendő, így a kedvező esetek száma:

összes:

Tehát a keresett valószínűség:

f)pontosan ász legyen közöttük?

kedvező: a ász közül féleképp választhatunk, ezután féleképp választható további lap úgy, hogy azok már nem ász lap, mivel közöttük „és” kötőszó értendő, így a kedvező esetek száma;

összes:

Tehát a keresett valószínűség:

g) piros és ász legyen a kihúzott lapok között?

Mivel a feladat szövege két „átfedésben lévő” feltételt ad meg, hiszen a piros ász lap egyedül teljesíti mindkét feltételt, ezért a kedvező esetek számának meghatározásakor aszerint végzünk esetvizsgálatot, hogy a piros ász a kiválasztott lapok között van vagy sem.

kedvező:

.eset: a piros ász közte van.

Mivel ezzel az egyetlen lappal biztosítottuk a feltételeket, így a pakliból kivesszük a további piros és ász lapot, majd a maradék lapból választunk további lapot, ezt féleképp tehetjük meg;

.eset: a piros ász nincs közte.

A piros ász nélküli maradék piros lapból féleképp választhatunk egyet, a piros ász nélküli maradék ász lapból féleképp választhatunk egyet, tehát féleképp tehetjük meg.

Mivel az egyes esetek között „vagy” kötőszó értendő ezért a kedvező esetek száma.

összes:

Tehát a keresett valószínűség:

9.Feladat: Szabályos oldalú dobóoktaéderrel dobunk egymás után kétszer és a kapott értékeket összeszorozzuk. Jelöljük „”-val azt az eseményt, hogy a kapott szorzat osztható -mal; jelöljük „”-vel, hogy a kapott szorzat prímszám; jelöljük „”-vel, hogy a kapott szorzat legfeljebb ?

Foglaljuk áttekintő táblázatba a lehetséges dobásokat és a kapott szorzat értékeit, így csak ebből kell összeszámoljuk a kedvező eseteknek megfelelő cellákat:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Határozza meg a következő események valószínűségét!

3.Kitűzött Házi Feladat: Szabályos oldalú játékkockával dobunk egymás után kétszer és a kapott értékeket összeadjuk. Jelöljük „”-val azt az eseményt, hogy a kapott összeg páratlan; jelöljük „”-vel, hogy a kapott összeg prímszám; jelöljük „”-vel, hogy a kapott összeg legalább ?

Határozza meg a következő események valószínűségét!

4.Kitűzött Házi Feladat: Egy zsákban mérőrudak vannak, amelyek: egység hosszúságúak. Véletlenszerűen kihúzunk közülük hármat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezekből háromszög állítható össze?

5.Kitűzött Házi Feladat: Az óperencián túli 11.C osztály matematika tantárgy témazáró dolgozatának eredménye „abc”-sorrendben: .

Határozza meg az osztályzatok móduszát, mediánját, terjedelmét! Ezek közül az osztályzatok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a)prímszám osztályzatot választunk?

b)legalább hármas osztályzatot húzunk?

Ezek közül az osztályzatok közül véletlenszerűen (ismétlés nélkül) kiválasztunk kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy

a)mindkettő prímszám osztályzatú?

b)mindkettő legalább hármas osztályzatú?

c)az egyik páros szám osztályzat a másik prímszám osztályzat?

d)az egyik páratlan szám osztályzat, a másik legelább hármas osztályzat?

e)mindkettő módusz osztályzatú?

f)az egyik módusz, a másik a terjedelem értékével megegyező osztályzat?

Az elkövetkezendő feladatokban esetenként előfordul, hogy elsőnek az összes lehetőségek számát határozzuk meg, majd azután a kedvező esetek számát (vagy azok közül válogatjuk ki a ténylegesen kedvezőket). Ez senkit se tévesszen meg, mert valószínűség számítási feladatok megoldásának megadásakor mindig hányadosként írjuk fel, hiszen a kapott értéknek minden esetben zárt intervallumba tartozó értéknek kell lennie.

1.Feladat: Az számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával kilencjegyű számokat készítünk és közülük véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott kilencjegyű számban az számjegyek valamilyen sorrendben egymás mellett szerepelnek?

Az összes esetek meghatározásakor felhasználjuk, hogy különböző számjegyből jegyű számokat készítünk, tehát (ez a mindből mind esete) vagyis ismétlés nélküli permutációval adódik:

Ezek közül kedvező esetnek minősülnek azok, amelyekben ténylegesen egymás mellett vannak a megadott számok. Ekkor direktben egymás mellettinek fixáljuk a megadott számjegyeket (és egyidejűleg „mozdítjuk” mindet) vagyis csak „számjegy”-nek keressük az összes lehetséges sorbarendezéseinek számát, ez: lehetőség. Ez azon esetek száma, amikor a direktben fixált számjegyek a megadott kötött sorrendben követik egymást. Mivel a fixált számjegyek közvetlen egymás melletti felcserélésével továbbra is teljesíthetők a feltételek. Pl. ha az számjegyek esetén felcseréljük az első kettőt, akkor azon jegyű számok száma, amelyekben a fixálandó számjegyek sorrendben követik egymást szintén lehetőség adódik. Vagyis az összes kedvező lehetőség darabszámának meghatározásához azt számoljuk, hogy a 4 számjegyet hányféleképpen tudjuk egymás mellett tartva sorbarendezni. Ebből lehetőség van, így a kedvező esetek száma: .

Tehát a keresett valószínűség:

Megjegyzés: Abban az esetben, ha a megadott számjegyből nem jegyű számokat, hanem csak jegyű számokat kell készíteni (ismétlés nélkül), azzal a feltétellel, hogy a jelölt számjegy egymás mellett legyen, akkor az összes esetek darabszámát ismétlés nélküli variációval határozhatjuk meg, (hiszen mindből csak valahánnyal kell foglalkozni, viszont fontos a számjegyek sorrendje, mert jegyű számokat készítünk) így

A kedvező esetek számának meghatározásakor a fixálandó számjegyeken kívül a maradék számjegyekből további kettőre van szükségünk a kívánt jegyű szám elkészítéséhez. Ebből először azt számoljuk, hogy hányféleképp tudjuk kiválasztani azt a kettőt, amely bekerül a felírandó jegyű szám számjegyei közé. A „további” 5 számjegyből kiválasztásakor ismétlés nélküli kombinációval választunk ki (mert pl. ha a számpár választottuk ki, akkor mindegy, hogy azt ebben a sorrendben vagy sorrendben választjuk ki, ugyanarról a két számjegyről van szó), ezt

féleképp tehetjük, meg majd ezután foglalkozunk a fixált és további kiválasztott számjegyeket tartalmazó összes felírható jegyű számok számának meghatározásával. A fixált sorrendű számokat ekkor szintén egymás mellett tartva, a további kettővel összesen lehetőség van, de a fixálandó számjegyeknek ilyenkor is lehetősége, tehát a kedvező esetek száma: lehetőség, így a keresett valószínűség:

1.Kitűzött Házi Feladat: moziba mennek, jegyük egymás melletti helyekre szól. Mennyi annak a valószínűsége, hogy valamilyen sorrendben egymás mellett ül, ha véletlenszerűen foglalnak helyet?

2.Feladat: A -nál kisebb pozitív egészek közül véletlenszerűen választunk egyet.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a)prím?

A -nál kisebb pozitív egészek között () prímszámokból van, ez a kedvező esetek száma, hiszen közülük csak egyet választunk. Az összes esetek száma , mert -nál kisebbnek is és pozitívnak is kell lennie, így a keresett valószínűség:

Megjegyzés: ha a kérdés nem prímszám feltételt, hanem összetett szám feltételt mond, ügyelnünk kell arra, hogy a kedvező esetek száma nem , mert ezek között még ott van az -es, amely nem prím és nem összetett.

Vagyis a kedvező esetek száma: , így ekkor a keresett valószínűség: .

Tehát annak valószínűsége, hogy a -nál kisebb pozitív egészek közül nem prím és nem összetettet választunk véletlenszerűen: .

b)nem osztható -vel, nem osztható -mal és nem osztható -tel?

Az összes esetek száma marad , mert -nál kisebb is és pozitív is. A kedvező esetek számát (általánosan a halmazelméleti Logikai szita formula alkalmazásával határozhatjuk meg) a kis minta miatt egyszerűbb, ha felsoroljuk, ezek: tehát , így a keresett valószínűség:

Megjegyzés: ha nem -nál kisebb, hanem -nél kisebb pozitív számok közül választunk, akkor a Logikai szita formula értelmében a megoldáshoz külön-külön számoljuk a darabszámokat:

Amelyek oszthatók -vel is; -mal is és -tel is, tehát -cal is, ebből vagyis van; Amelyek, oszthatók -vel is; -mal is, tehát -tal, ebből vagyis van;

Amelyek, oszthatók -vel is; -tel is, tehát -tal, ebből van;

Amelyek, oszthatók -mal is; -tel is, tehát -tel, ebből vagyis van;

Amelyek oszthatók -vel, ebből van;

Amelyek oszthatók -mal, ebből vagyis van;

Amelyek oszthatók -tel, ebből van;

Tehát a kedvező esetek száma:

így a keresett valószínűség:

3.Feladat: A -nál kisebb pozitív egészek közül véletlenszerűen választunk kettőt.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok a)prímek?

A -nál kisebb pozitív egészek között () prímszámokból van, ezek közül választunk kettőt. (Ez olyan, mintha lottón húznánk számokat, tehát a sorrend figyelembe vétele nélkül ismétlés nélkül történik a kiválasztás.) Tehát a kedvező esetek száma: , hiszen közülük kettőt választunk. Az összes esetek száma pedig , így a keresett valószínűség: .

b)nem oszthatók -vel, nem oszthatók -mal és nem oszthatók -tel?

Az összes esetek száma marad , mert -nál kisebb pozitív számok közül választunk kettőt. A kedvező esetek számát (általánosan a halmazelméleti Logikai szita formula alkalmazásával határozhatjuk meg) a kis minta miatt egyszerűbb, ha felsoroljuk, ezek: tehát , ezek közül választunk véletlenszerűen kettőt, ezt féleképp tehetjük meg, így a keresett valószínűség:

Megjegyzés: ha nem -nál kisebb, hanem -nél kisebb pozitív számok közül választunk, akkor a keresett valószínűség:

2.Kitűzött Házi Feladat: Az egyjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a)mindkettő prím? b)összegük osztható öttel?

3.Kitűzött Házi Feladat.: Egy osztály „kettes-lottót” szervez, amelynél az számok közül húznak kettőt.

Piftike olyan szelvényeket töltött ki és adott le, amelyeken az összes lehetséges módon prímszám párokat jelölt.

Mennyi a valószínűsége, hogy nála lesz a telitalálatos szelvény?

4.Kitűzött Házi Feladat: Egy fős csoportban kétféle idegen nyelvet tanulnak, fő angolul és fő németül (mindenki tanul legalább egy nyelvet). a)Mekkora valószínűséggel választunk egy olyan tanulót, aki pontosan egy nyelvet tanul? b)Mennyi annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztott két tanuló közül egyikőjük egy valamelyik nyelvet tanulja, a másik pedig mindkettőt?

5.Kitűzött Házi Feladat: Az számjegyek felhasználásával kétjegyű számokat készítünk. a)Mennyi a valószínűsége, hogy az ismétlés nélkül kiválasztott számjegyekből felírt kétjegyű szám prím? b)Mennyi a valószínűsége, hogy az ismétléssel kiválasztott számjegyekből felírt kétjegyű szám prím?

6.Kitűzött Házi Feladat: Az egyjegyű pozitív páratlan számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy egy számjegyet legfeljebb egyszer használhatunk fel. Mennyi a valószínűsége, hogy a felírt szám nem osztható -tel?

4.Feladat: Szabályos játékkockával dobunk egymás után négy alkalommal és a kapott értékeket a dobások sorrendjében egymás mellé írva négyjegyű számokat készítünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a)számjegyei között van -ös számjegy?

Az összes esetek számának meghatározásakor figyelembe kell vegyük a feladat szövegének azt az információját, hogy négyjegyű számokat készítünk, (tehát a sorrend figyelembe vételével az egyes helyiértékekre az ismétlés lehetőségével választunk ki), ezt . Ezek közül kedvező, ha van közöttük -ös számjegy, ez azt jelenti, hogy vagy vagy vagy vagy -ös számjegy van a felírt négyjegyű számjegyei között. Nem lehetetlen, de talán egyszerűbb a „megkerülős csel”, vagyis a számjegyek között van -ös számjegy=legalább -ös számjegyet tartalmaz eseménynek megfogalmazzuk komplementerét, ez: legfeljebb -ös számjegyet tartalmaz=számjegyei között nincs -ös. Ekkor a felírható négyjegyű szám számjegyeinek mindegyikére csak lehetőséget fogadunk el (szintén ismétléses variációval). Tehát a komplementer esemény valószínűsége: így a keresett esemény valószínűsége:

b)osztható -gyel?

Az összes lehetőség száma továbbra is (ismétléses variációval számolva) .

Ezek közül azok oszthatók -gyel, amelyeknek az utolsó számjegyéből álló kétjegyű szám osztható -gyel, tehát esetvizsgálattal felsoroljuk a lehetséges végződéseket. Ezek (figyelembe véve a számjegyek korlátját) . Közülük bármelyik kétjegyű számot is rögzítjük az utolsó két számjegy helyére, elmondható, hogy ekkor az első két számjegy helyére (ismétléses variációval számolva) lehetőség van, vagyis a kedvező esetek száma: , tehát a keresett valószínűség:

c)számjegyei között pontosan két darab -as szerepel?

Az összes lehetőség száma továbbra is (ismétléses variációval számolva) .

.lehetséges megoldás: ha a megoldást megpróbáljuk direktben lekövetni. Ekkor elmondható, hogy a pontosan két darab -as számjegy azt feltételezi, hogy a kimaradó két számjegy lehet (-astól különböző) szintén ismétlődő számjegy vagy (-astól különböző) két további számjegy.

Ha (-astól különböző) másik ismétlődő számjegyet feltételezünk, akkor pl. -as és -ös számjegyből (ismétléses permutációval számolva) tehát ezekből lehetőség van.

Vagy ha (-astól különböző) másik két számjegyet feltételezünk, akkor (ismétlés nélküli kombinációval) előbb azt határozzuk meg hányféleképp választhatunk ki a maradék számjegyből további , ezt féleképp tehetjük meg. Ezután pl. -as, -ös és -os számjegyből (ismétléses permutációval számolva) lehetőség van, vagyis ezekből a lehetőségek száma. Ekkor (mivel az egyes kedvező esetek között „vagy” kötőszó értendő) a kedvező esetek száma: , így a keresett valószínűség: .

.lehetséges megoldás: a „megkerülős csel” értelmében megfogalmazzuk a keresett esemény komplementer eseményét, ekkor a pontosan két darab -as számjegyet tartalmaz komplementere nem -as számjegyet tartalmaz.

Ekkor szintén esetvizsgálat szükséges, mert ennek a komplementer eseménynek eleget tesz az, ha -as számjegyet tartalmaz, ebből (a megszorító feltétel figyelembe vételével ismétléses variációval) lehetőség van.

Vagy eleget tesz az, ha pontosan -as számjegyet tartalmaz, ekkor viszont ezen az eseten belül esetvizsgálat szükséges, mert előfordulhat, hogy a (-as számjegyen kívül) csak egyet választunk, amely háromszor ismétlődik, ebből (ismétléses permutációval) féleképp lehetséges, tehát ebből lehetőség van.

Ugyanezen eseten belül előfordulhat az, hogy a (-as számjegyen kívül) csak kettő másikat választunk, ekkor a maradék számjegyekből (ismétlés nélküli kombinációval) féleképp lehetséges kiválasztani további kettőt, ezután pedig a kiválasztott számjegyekből (ismétléses permutációval) lehetőség van, tehát lehetőség van, amelynél a kettes szorzó azért kell, mert nem tudjuk, hogy a kiválasztott számjegy közül melyik ismétlődik. Végül ezen az eseten belül az is lehetséges, hogy a (-as számjegyen kívül) kimaradó számjegyek közül különbözőt választunk, ekkor (ismétlés nélküli kombinációval) a további lehetséges számjegyből választunk hármat, ezt féleképp tehetjük meg, ezután a kiválasztott számjegyeket (ismétlés nélküli permutációjával számolva) féleképp rakható sorrendbe, így lehetőség van.

Vagy eleget tesz az is, ha pontosan -as számjegyet tartalmaz, ekkor a további számjegyből ötféleképp választhatunk egyet, majd (ismétléses permutációval számolva) sorbarendezés lehetséges így ekkor lehetőség van. Végül eleget tesz az az eset, ha -as számjegyet tartalmaz, ez egyféleképp lehetséges.

Így a kedvező esetek száma (mert közöttük „vagy” kötőszó értendő) ,

tehát a komplementer esemény valószínűsége: így a keresett esemény valószínűsége: .

Ez az eredmény összhangban van az első lehetséges megoldásai módszerrel.

Megjegyzés: látható, hogy előfordulhatnak olyan feladatok, amikor nem segít a megkerülős csel, tehát nem lesz egyszerűbb a feladat megoldása, ha a komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg előbb.

7.Kitűzött Házi Feladat: Szabályos játékkockával dobunk egymás után három alkalommal és a kapott értékeket a dobások sorrendjében egymás mellé írva háromjegyű számokat készítünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott háromjegyű szám nagyobb, mint ?

8.Kitűzött Házi Feladat: Egy zacskóban gumicukor van. A cukorkák -a piros, része zöld és feleannyi sárga színű van, mint zöld. A maradék cukorkák színe kék. A zacskóból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott gumicukor kék színű?

9.Kitűzött Házi Feladat: Szabályos játékkockát feldobunk egymás után hatszor és a kapott értékeket a dobások sorrendjében felírjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak kétféle számjegyből álló hatjegyű számot kapunk, amelyben az egyes számjegyekből ugyanannyi van?

10.Kitűzött Házi Feladat: Szabályos pénzérmét egymás után négyszer feldobunk és a dobások sorrendjében az eredményeket felírjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy ugyanannyi fej-et dobtunk, mint írás-t?

5.Feladat: Egy dobozban fehér golyó van. Legalább mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fehér golyó húzásának esélye legyen?

A feladat szövegében szereplő esély mennyiség „átváltható” valószínűségi értékké, ha azt leosztjuk -zal.

Jelöljük a szükséges fekete golyók számát, ekkor a valószínűség klasszikus modellje, tehát a hányados értelmében felírható a következő egyismeretlenes törtes egyenlet:

Tehát fekete golyót kell a dobozba rakni, ahhoz, hogy a fehér golyó húzásának esélye legyen.

Megjegyzések: (1)természetesen a feladat szövege a fekete golyó húzására is vonatkozhat akár megadott valószínűségi értékkel, akár esély megadásával. Pl.: Legalább mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fekete golyó húzásának esélye legyen? Ekkor a megoldandó egyenlet:

Tehát fekete golyót kell tennünk a dobozba, ahhoz, hogy a fekete húzásának valószínűsége legyen.

(2)A feladat szövege nem csak konkrét értéket tartalmazhat, hanem a hétköznapi életben előforduló relációval fogalmazza meg, úgymint „kisebb”, „kisebb vagy egyenlő mint”=”legfeljebb”, „nagyobb”, „nagyobb vagy egyenlő mint”=”legalább”. Pl.: Legfeljebb mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fehér golyó húzásának esélye nagyobb legyen, mint ? Ekkor nem egyenletet, hanem egyenlőtlenséget írunk fel, és vonjuk le a megfelelő következtetést:

Tehát az egyenlőtlenség megoldása, vagyis legfeljebb fekete golyót tehetünk a dobozba, hogy a fehér húzásának valószínűsége -nál legyen.

Pl.: Legalább mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fekete golyó húzásának esélye legfeljebb legyen?

Tehát vagyis legfeljebb fekete golyót tehetünk a dobozba ahhoz, hogy a fekete golyó húzásának esélye legfeljebb legyen.

11.Kitűzött Házi Feladat: Egy dobozban fehér golyó van. Mennyi fekete golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a)fekete golyó húzásának valószínűsége legyen?

b)a fekete golyó húzásának esélye kisebb legyen, mint !

c)a fehér húzásának esélye legalább legyen!

6.Feladat: Az számjegyeket tartalmazó halmazból készíthető részhalmazokból mennyi a valószínűsége, hogy csak páros számok vannak a részhalmazban?

Tetszőleges „” elemű halmaz összes részhalmazainak száma: , esetünkben ennek a elemű halmaznak összesen darab részhalmaza van, ez az összes esetek száma. Ezek közül választjuk ki azokat a részhalmazokat, amelyek kizárólag páros számjegyeket tartalmaznak, ez esetvizsgálatot feltételez.

.eset: a kiválasztott részhalmaz elemű, ebből van, mert az eredeti halmazban páros számjegy van.

.eset: a kiválasztott részhalmaz elemű, ebből (ismétlés nélküli kombinációval számolva, mert a halmaz esetén teljesen mindegy az elemek felsorolásának sorrendje) van.

.eset: a kiválasztott részhalmaz elemű, ebből (ismétlés nélküli kombinációval számolva, mert a halmaz esetén teljesen mindegy az elemek felsorolásának sorrendje) van.

4.eset: a kiválasztott részhalmaz elemű, ebből (ismétlés nélküli kombinációval számolva, mert a halmaz esetén teljesen mindegy az elemek felsorolásának sorrendje) van.

Tehát a kedvező esetek száma: , így a keresett valószínűség: .

12.Kitűzött Házi Feladat: Az számjegyeket tartalmazó halmaz összes részhalmazai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott részhalmaznak legalább eleme van?

7.Feladat.: Egy osztály tanulói dolgozatot írtak, amelyre mindenki az betűkből alkotott kétbetűs kódokat írták fel -tól -ig. Tudjuk, hogy minden lehetséges kódot kiosztottak és hogy nem volt két olyan tanuló, aki ugyanazt a kódot kapta volna. Mennyi annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy dolgozatot, az azon szereplő kód legfeljebb egy betűt tartalmaz?

Az összes esetek darabszámának meghatározásakor figyelembe kell venni, hogy pl. az illetve kódok különböző személyek jelölésére vonatkozik, tehát (ismétléses variációval számolva) ennyi az osztály létszáma.

Ezek közül kell kiválasztanunk a kedvező eseteket, amelyeknek eleget tesz, ha nincs a kódban betű, vagy az is, ha betű van benne. Ha ezt az esetvizsgálatot választjuk, akkor olyan lehetőség van, amely nem tartalmaz betűt. Ha pedig pontosan betű van benne, akkor esetvizsgálat szükséges, mégpedig attól függően, hogy a másik kettő karakter ismétlődik vagy sem. Ha ismétlődik, akkor (ismétléses permutációval számolva) féleképp lehet sorbarendezni vagyis attól függően melyik karakter az ismétlődő. Ha pedig nem ismétlődik, akkor különböző karaktert (ismétlés nélküli permutációval számolva) féleképp lehet sorbarendezni.

Tehát a kedvező esetek száma: , így a keresett valószínűség: .

Abban az esetben, ha a „megkerülős csel”-t alkalmazzuk, akkor legfeljebb egy betűt tartalmaz eseménynek megfogalmazzuk komplementerét, ez a legalább betűt tartalmaz. Ez esetvizsgálatot jelent, mégpedig ha betűt tartalmaz, ebből (ismétléses permutációval) féleképp rendezhető sorba, tehát lehetőség van, attól függően melyik további karaktert választjuk a betű mellé. Ha pedig betűt tartalmaz, ebből van, vagyis a kedvező esetek száma: , tehát a komplementer esemény valószínűsége: , így a keresett esemény valószínűsége: .

8.Feladat: Mennyi a valószínűsége, hogy a a)olyan pozitív osztóját választjuk, amely -zel osztható?;

Az összes eset meghatározásához felhasználjuk a prímtényezős felbontást, amely szerint a számnak pozitív osztója van, ez az összes esetek száma.

Ezek közül a kedvezők, tehát amelyek oszthatók -zel, kizárólag azok lehetnek, amelyek eleve tartalmaznak -es szorzót. Ezen kívül a „kimaradó” számnak az osztóinak számát szintén ebből a prímtényezős felbontásból határozhatjuk meg, ez: lehetőség van, így a keresett esemény valószínűsége: .

b)két olyan pozitív osztóját választjuk, amelyek közül az egyik -mal a másik -tel osztható?

Az összes esetek számának meghatározásakor a pozitív osztóból (ismétlés nélküli kombinációval számolva) féleképp választhatjuk ki valamely kettőt. A kedvező esetek számának meghatározásakor előbb meghatározzuk azon pozitív osztók számát, amelyek oszthatók -mal, ebből:

van; azok a pozitív osztók, amelyek oszthatók -tel, ebből:

van, tehát féleképp választhatunk ki osztót úgy (mert közöttük „és” kötőszó szerepel), hogy az egyik osztható -mal a másik osztható -tel. A keresett valószínűség:

Megjegyzések: (1)a keresett valószínűség meghatározható komplementer esemény megfogalmazásával is;

(2)ha a feladat szövege nem mondja, hogy pozitív osztó, hanem általánosan fogalmazva osztóról tesz említést, akkor nem , hanem osztó közül választunk.

13.Kitűzött Házi Feladat: Egy csoport tanulói dolgozatot írtak, amelyre mindenki az betűkből alkotott kétbetűs kódokat írták fel -tól -ig. Tudjuk, hogy minden lehetséges kódot kiosztottak és hogy nem volt két olyan tanuló, aki ugyanazt a kódot kapta volna. Mennyi annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy dolgozatot, az azon szereplő kód legalább egy betűt tartalmaz?

14.Kitűzött Házi Feladat: Mennyi a valószínűsége, hogy a a)olyan pozitív osztóját választjuk, amely -szal osztható?; b)két olyan osztóját, amely közül az egyik osztható -cal, a másik osztható -nel?

9.Feladat: Az karaktereket felírjuk egy-egy cetlire és berakjuk egy kalapba. A kalapból ezután kiveszünk cetlit ismétlés nélkül (akár egymás után ismétlés nélkül, akár egyszerre). Mennyi a valószínűsége, hogy a) „” betűt választunk?

Vizsgáljuk először a megoldást úgy, hogy egyszerre választjuk ki a cetlit. Ekkor az a kedvező eset, ha ténylegesen a „” betűt választjuk ki, ezt (ismétlés nélküli kombinációval számolva) féleképp lehetséges.

Az összes esetek lehetőségének meghatározásához az a kérdés, hogy elem közül hányféleképp tudunk kiválasztani hármat, ezt (szintén ismétlés nélküli kombinációval számolva) tehetjük meg, így a keresett esemény valószínűsége: .

Vizsgáljuk most úgy a megoldást, hogy az egyes húzásokat egymás után végezzük, ilyenkor külön-külön állapítjuk meg a kérdezett valószínűségeket. Az első húzáskor a keresett valószínűség: . A második húzáskor (figyelembe véve, hogy már kivettünk „” jelű karaktert és ezáltal -gyel csökkent a dobozban lévő cetlik száma) így .

A harmadik húzáskor pedig (figyelembe véve, hogy már kivettünk „” jelű karaktert és ezáltal -vel csökkent a dobozban lévő cetlik száma) így . Mivel egymás után végezzük a húzásokat, tehát közöttük „és” kötőszó értendő, így a keresett valószínűség: .

b) „” betűt választunk?

A megoldás megadható, ha a húzást egyidejűleg feltételezzük vagy ha külön-külön „lekövetjük”. Válasszuk az utóbbit, ekkor az első húzáskor a keresett valószínűség: . A második húzáskor (figyelembe véve, hogy már kivettünk „” jelű karaktert és ezáltal -gyel csökkent a dobozban lévő cetlik száma) így .

A harmadik húzáskor pedig (figyelembe véve, hogy már kivettünk „” jelű karaktert és ezáltal -vel csökkent a dobozban lévő cetlik száma) így . Mivel egymás után végezzük a húzásokat, tehát közöttük „és” kötőszó értendő, így a keresett valószínűség: .

15.Kitűzött Házi Feladat: A szekrényben piros sárga és fehér törölköző van. Véletlenszerűen, ismétlés nélkül (akár egymás után visszatevés nélkül, akár egyszerre) kiveszünk kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettő sárga?

Megemlítendő a valószínűség számítási feladatok úgynevezett binomiális tétellel történő megoldása. Az alap-tétel:

(Ez a függvény-táblázat 73.oldalán található!)

Tekintsünk egy szabályos játékkockát, amellyel egymás után alkalommal gurítunk. Amennyiben a feladat arra kérdez rá: Mennyi a valószínűsége, hogy a dobás közül pontosan alkalommal dobunk -ost?

Mivel a feladat nem határozza meg, hogy melyik dobásunk legyen -os, ezért előbb azt számoljuk: hányféleképp fordulhat elő, hogy a dobásból darab -ost dobtunk? Ezt ismétlés nélküli kombinációval határozhatjuk meg.

Az összefüggésben ezután foglalkozunk a „kedvező valószínűséggel” (amelyben ténylegesen -ost dobtunk); illetve komplementer-esemény alkalmazásával foglalkozunk a „kedvezőtlen valószínűséggel” (amelyben nem dobtunk -ot).

A kockadobásnál a valószínűsége annak, (hogy -est dobunk vagy) hogy -ost dobunk ez a számunkra kedvező valószínűség. Ebből pedig következik, hogy a kedvezőtlen valószínűség komplementer-eseménnyel:

a valószínűsége annak, (hogy nem -est dobtunk vagy) hogy nem -ost dobtunk. Illetve

Az összefüggésbe történő helyettesítéssel a keresett valószínűség meghatározható:

Megjegyzés: ugyanennek az összefüggésnek alkalmazásával határozható meg annak valószínűsége is:

Mennyi a valószínűsége, hogy -ből legfeljebb alkalommal dobunk -ost?

Ekkor esetvizsgálat szükséges, mert a legfeljebb feltételnek eleget tesz az, ha egyszer sem dobtunk -ost vagy ha pontosan -szer dobtunk -ost. Ekkor a „vagy” kötőszó miatt az egyes esetek valószínűségeit összegezzük:

16.Kitűzött Házi Feladat: Egy szabályos 8 oldalú játékkockával (dobó-oktaéderrel) dobunk egymás után 6 alkalommal.

Mennyi a valószínűsége, hogy

a)pontosan alkalommal dobtunk -et?

b)pontosan alkalommal dobtunk -at?

c)pontosan alkalommal dobtunk prímszámot?

d)legalább alkalommal dobtunk -ot?

e)legfeljebb alkalommal dobtunk legalább -ot?

Bizonyos hétköznapi élethelyzetekben előfordulhatnak olyan esetek, amikor a kiválasztás ismétléssel történik. Ilyen pl. az, amikor minőség ellenőrző tesztelést végeznek véletlenszerű kiválasztással és a való életben (időnként előfordulhat, hogy az alkalmazott véletlenszám-generátor) ugyanazon sorszámú termékek ellenőrzésének elvégzését írja elő.

Az ilyen esetekben már kimondottan az lesz a célravezető, ha az egyes húzásokat külön-külön lekövetjük, majd a többszöri húzások esetén feltételezett „és” kötőszó miatt, az egyes valószínűségi értékek szorzataként adjuk meg a kérdéses valószínűséget.

10.Feladat: Az karaktereket felírjuk egy-egy cetlire és berakjuk egy kalapba. A kalapból ezután kiveszünk cetlit ismétléssel, tehát a kihúzott cetlin lévő karaktert felírjuk, majd visszadobjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) „” betűt választunk?

Azonnal megállapítható, hogy az ismétléssel történő kiválasztás mindegyikénél az „” karaktert: ; a „” karaktert:

, a „” karaktert: , a „” karaktert: valószínűséggel tehetjük meg.

Tehát a keresett valószínűség: .

b) „” betűt választunk?

A keresett valószínűség:

c)elsőre „” betűt húzunk?

Az első húzás valószínűsége ekkor: , a további két húzáskor pedig minden kedvező, ami nem „” betű, vagyis tehát a keresett valószínűség:

Megjegyzés: ugyanez a megoldás adódik, ha a feladat szövege nem az első, hanem pl. a harmadik húzásra követeli meg az „” karakter húzását.

d)legalább kétszer „” betűt húzunk?

A legalább kettő „” betű esetvizsgálatot feltételez, ha pontosan „” karaktert húztunk, ekkor (ismétlés nélküli kombinációval számolhatjuk ki, hogy a három húzás közül melyik az a kettő, amikor ténylegesen „” karaktert választottunk), ezt féleképp tehetjük meg, így „” karakter húzásának valószínűsége:

. Másik lehetőség, ha mindhárom karakter „” betű, ennek valószínűsége:

. Mivel a két eset között „vagy” kötőszó szerepel, így a keresett valószínűség:

.

Megjegyzések: (1)az ismétléses mintavételnél ez a számítási módszer közvetlen lekövetéssel, a következőképp alakul:

1.eset: ha az első és második húzás az „” karakter és a harmadik egyéb, ekkor:

2.eset: ha az első és harmadik húzás az „” karakter és a második egyéb, ekkor:

3.eset: ha a második és harmadik húzás az „” karakter és az első egyéb, ekkor:

Amikor mindegyik „” karakter: így a keresett valószínűség az egyes esetek között feltételezett „vagy” kötőszó miatt:

(2)a kérdezett valószínűség komplementer esemény valószínűséggel is meghatározható, ekkor a legalább „” esemény komplementere: legfeljebb „” karakter húzását jelenti, amely szintén esetvizsgálatot jelent, mert eleget tesz neki, ha pontosan „” betűt húztunk vagy ha nincs közötte „” betű. Ugyanez az eredmény adódik.

17.Kitűzött Házi Feladat: A szekrényben piros sárga és fehér törölköző van. Véletlenszerűen, ismétléssel kiveszünk kettőt. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettő sárga?

18.Kitűzött Házi Feladat: -ig számozott fehér golyót tesznek egy dobozba, amelyből -et húznak ki visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy a golyóra írt számok szorzata lesz?

Az utolsó alapvető valószínűség számítási feladat típus, a geometriai valószínűség meghatározása. A hétköznapi szituáció, pl. a darts játék, amelynél egy kör alakú céltáblára dobunk. Az ilyen feladatokban a keresett valószínűség értelmezésekor a hányadost alakban értelmezzük. (Valamint minden esetben feltételezzük, hogy a céltáblát eltaláljuk.)

11.Feladat: Egy átmérőjű kör alakú céltábla legbelső, legtöbb pontot érő belső köre kerületű kör. Mekkora valószínűséggel találjuk el ezt a legbelső kört?

Ha a teljes tábla átmérője: , akkor a tábla sugara: , tehát az összes terület: .

Ha belső (legtöbb pontot érő kör) kerülete: akkor ennek sugara: , tehát a kedvező terület:

így a kérdéses valószínűség:

Megjegyzés: Abban az esetben, ha nem egyszer, hanem egymás után háromszor is dobunk a táblára (és feltételezzük, hogy mindegyik dobásunkkal eltaláljuk a táblát) akkor az egyes dobások közötti „és” kötőszó miatt annak valószínűsége, hogy mindegyik dobásunkkal eltaláljuk a legbelső kört: .

12.Feladat: Egy átmérőjű kör alakú céltábla legbelső, legtöbb pontot érő belső körét eséllyel találjuk el. Mekkora ennek a belső körnek a sugara?

Ha a teljes tábla átmérője: , akkor a tábla sugara: , tehát az összes terület: .

A geometriai valószínűség értelmében a megoldandó egyenlet:

Ebből: .

Megjegyzés: a feladat szövegezése természetesen reláció megadásával (kisebb, kisebb vagy egyenlő mint=legfeljebb, nagyobb, nagyobb vagy egyenlő mint=legalább) fogalmakat is alkalmazhat. Pl.: Legfeljebb mekkora a legbelső, legtöbb pontot érő kör sugara, ha azt legfeljebb eséllyel találjuk el? Az ilyen esetben nem egyenletet, hanem egyenlőtlenséget oldunk meg és abból vonjuk le a megfelelő következtetést.

Ebből: . (A kapott egyenlőtlenség tényleges megoldása: de ilyenkor eltekintünk a negatív előjelű lehetséges megoldáshalmaztól és úgy vonjuk le a következtetést: .

19.Kitűzött Házi Feladat: Egy kör alakú céltáblára dobunk (és feltesszük, hogy azt el is találjuk). Tudjuk, hogy a sugarú legbelső, legtöbb pontot érő kört valószínűséggel találjuk el. Mekkora a tábla teljes átmérője?

13.Feladat: Egy kör alakú céltábla legtöbb pontot érő, legbelső körének átmérője , majd belülről kifelé -rel növekszik a koncentrikus körök (közös középponttal rendelkező körök) átmérője. Tudjuk, hogy a tábla teljes átmérője és kívülről befelé -tól kezdve -gyel növekednek a pontszámok.

Bármi is legyen a feladat kérdése, előbb határozzuk meg a tábla adatait. Ha legbelső kör átmérőjű, akkor annak sugara , innentől kezdve, ha az egyes körök átmérői kifelé -rel növekednek, akkor a koncentrikus körök sugarai -rel növekednek. Tehát egy paraméterekkel rendelkező számtani sorozatban gondolkodunk, amelynél az a kérdés, hogy a átmérőjű teljes táblában hány koncentrikus kör van. A sorozatnak hányadik eleme . A számtani sorozat „”-edik elemére vonatkozó összefüggés szerint:

Ebből elvégezve a lehetséges átalakításokat: adódik. A feladat szövegének értelmében a legkülső kör pontot ér és befelé haladva a pontszámok -gyel növekednek, akkor egy paraméterekkel rendelkező számtani sorozatban gondolkodunk, amelynél az a kérdés, hogy mennyi a sorozat eleme. A számtani sorozat „”-edik elemére vonatkozó összefüggés szerint: tehát a legbelső kör pontot ér.

a)Mennyi a valószínűsége, hogy legalább pontot dobunk?

A legalább feltételhez hozzátartozik a pontok mindegyike. Ez egy sugarú (mert koncentrikus körök vannak a táblán) belső kört jelent, így a kérdéses valószínűség: .

b)Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan pontot dobunk?

A pontosan 8 pontot érő tartomány egy körgyűrű, amelynek belső sugara: , külső sugara: tehát ennek területe: , így a keresett valószínűség:

Megjegyzés: ha a feladat vagy pont szerzését kéri, akkor a kedvező területet jelentő körgyűrű belső sugara: , külső sugara: , területe: , így a keresett valószínűség: .

c)legfeljebb pontot dobunk?

A legfeljebb feltételhez hozzátartozik a pontok mindegyike. Az ezeknek a pontszámoknak eleget tevő kedvező területet jelentő körgyűrű belső sugara: , külső sugara: tehát területe: így a keresett valószínűség: .

d)prímszám pontot dobunk?

A feladatban lévő feltételnek eleget tesz az, ha pontot dobunk. A kedvező terület az egyes körgyűrűk területeinek összegeként adódik. Ezek közül a pontot érő terület: , a pontot érő terület:

, az pontot érő terület: , a 7 pontot érő terület:

így a keresett valószínűség: .

Megjegyzés: A feladat még azzal bonyolítható, ha a tényleges darts tábla mintájára olyan kiemelt tartományokat is megadunk, amelyben dupla- vagy tripla pontszám is elérhető.

20.Kitűzött Házi Feladat: Egy kör alakú céltábla legtöbb pontot érő, legbelső körének átmérője , majd belülről kifelé -rel növekszik a koncentrikus körök (közös középponttal rendelkező körök) átmérője. Tudjuk, hogy a tábla teljes átmérője és kívülről befelé -tól kezdve -gyel növekednek a pontszámok.

a)Mennyi a valószínűsége, hogy legalább pontot dobunk?

b)Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan pontot dobunk?

c)legfeljebb pontot dobunk?

d)prímszám pontot dobunk?

1.Feladat: Az számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával kilencjegyű számokat készítünk és közülük véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott kilencjegyű számban az számjegyek valamilyen sorrendben egymás mellett szerepelnek?

Megjegyzés: Abban az esetben, ha a megadott számjegyből nem jegyű számokat, hanem csak jegyű számokat kell készíteni (ismétlés nélkül), azzal a feltétellel, hogy a jelölt számjegy egymás mellett legyen, akkor az összes esetek száma . A kedvező esetek számának meghatározásakor a fixálandó számjegyeken kívül a maradékból további kettőre van szükségünk a kívánt jegyű szám elkészítéséhez, ezt féleképp tehetjük, meg majd ezután foglalkozunk a fixált és további kiválasztott számjegyeket tartalmazó összes felírható jegyű számok számának meghatározásával. A fixált sorrendű számokat ekkor szintén egymás mellett tartva, a további kettővel összesen lehetőség van, de a fixálandó számjegyeknek ilyenkor is lehetőség van, valszín:

2.Feladat: A -nál kisebb pozitív egészek közül véletlenszerűen választunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a)prím? Megjegyzés: ha a kérdés nem prímszám feltételt, hanem összetett szám feltételt mond, a kedvező esetek száma: , így ekkor a keresett valószínűség: . A -nál kisebb pozitív egészek közül véletlenszerűen választunk kettőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok b)prímek?

4.Feladat: Szabályos játékkockával dobunk egymás után négy alkalommal és a kapott értékeket a dobások sorrendjében egymás mellé írva négyjegyű számokat készítünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a)számjegyei között van -ös számjegy? komplementer: legfeljebb -ös számjegy:

b)osztható -gyel? . c)számjegyei között pontosan két darab -as szerepel?

5.Feladat: Egy dobozban fehér golyó van. Legalább mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fehér golyó húzásának esélye legyen? . Tehát

Megjegyzések: (1)a feladat szövege a fekete golyó húzására is vonatkozhat akár megadott valószínűségi értékkel, akár esély megadásával. Pl.: Legalább mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fekete golyó húzásának esélye legyen? Ekkor a megoldandó egyenlet: . Tehát (2)előfordulhat „kisebb”, „kisebb vagy egyenlő mint”=”legfeljebb”, „nagyobb”, „nagyobb vagy egyenlő mint”=”legalább”. Pl.: Legfeljebb mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fehér golyó húzásának esélye nagyobb legyen, mint ? Ekkor egyenlőtlenséget oldunk meg,

. Tehát az egyenlőtlenség megoldása, vagyis legfeljebb fekete golyót tehetünk a dobozba, hogy a fehér húzásának valószínűsége -nál legyen.Pl.: Legalább mennyi fekete színű golyót tegyünk ugyanebbe a dobozba, hogy a fekete golyó húzásának esélye legfeljebb legyen? . Tehát vagyis legfeljebb fekete golyót tehetünk a dobozba ahhoz, hogy a fekete golyó húzásának esélye legfeljebb legyen.

7.Feladat.: Egy osztály tanulói dolgozatot írtak, amelyre mindenki az betűkből alkotott kétbetűs kódokat írták fel -tól -ig. Tudjuk, hogy minden lehetséges kódot kiosztottak és hogy nem volt két olyan tanuló, aki ugyanazt a kódot kapta volna. Mennyi annak a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy dolgozatot, az azon szereplő kód legfeljebb egy betűt tartalmaz? komplementer: legalább betűt tartalmaz. Esetvizsgálat, ha betűt tartalmaz, ebből (ismétléses permutációval) féleképp rendezhető sorba, tehát lehetőség van, attól függően melyik további karaktert választjuk a betű mellé. Ha pedig betűt tartalmaz, ebből van, vagyis a kedvező esetek száma: , így a valszín: .

9.Feladat: Az karaktereket felírjuk egy-egy cetlire és berakjuk egy kalapba. A kalapból ezután kiveszünk cetlit ismétlés nélkül (akár egymás után ismétlés nélkül, akár egyszerre). Mennyi a valószínűsége, hogy

a) „” betűt választunk? . Külön-külön, elsőre: másodikra: harmadikra .

b) „” betűt választunk? Külön-külön elsőre: másodikra: harmadikra így

Megemlítendő a valószínűség számítási feladatok úgynevezett binomiális tétellel történő megoldása. Az alap-tétel:

(Ez a függvény-táblázat 73.oldalán található!)

Tekintsünk egy szabályos játékkockát, amellyel egymás után alkalommal gurítunk. Amennyiben a feladat arra kérdez rá: Mennyi a valószínűsége, hogy a dobás közül pontosan alkalommal dobunk -ost?

Mivel a feladat nem határozza meg, hogy melyik dobásunk legyen -os, ezért előbb azt számoljuk: hányféleképp fordulhat elő, hogy a dobásból darab -ost dobtunk? Ezt ismétlés nélküli kombinációval határozhatjuk meg.

Az összefüggésben ezután foglalkozunk a „kedvező valószínűséggel” illetve a kedvezőtlen valószínűség komplementer-eseménnyel: . Továbbá helyettesítés:

Megjegyzés: ugyanennek az összefüggésnek alkalmazásával határozható meg annak valószínűsége is:

Mennyi a valószínűsége, hogy -ből legfeljebb alkalommal dobunk -ost? Esetvizsgálat

Bizonyos hétköznapi élethelyzetekben előfordulhatnak olyan esetek, amikor a kiválasztás ismétléssel történik. Ilyen pl. az, amikor minőség ellenőrző tesztelést végeznek véletlenszerű kiválasztással és a való életben (időnként előfordulhat, hogy az alkalmazott véletlenszám-generátor) ugyanazon sorszámú termékek ellenőrzésének elvégzését írja elő. Az ilyen esetekben már kimondottan az lesz a célravezető, ha az egyes húzásokat külön-külön lekövetjük, majd a többszöri húzások esetén feltételezett „és” kötőszó miatt, az egyes valószínűségi értékek szorzataként adjuk meg a kérdéses valószínűséget.

10.Feladat: Az karaktereket felírjuk egy-egy cetlire és berakjuk egy kalapba. A kalapból ezután kiveszünk cetlit ismétléssel, tehát a kihúzott cetlin lévő karaktert felírjuk, majd visszadobjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a) „” betűt választunk? A karakterek húzásai ; ; ; valszín így

. b) „” betűt választunk? A keresett valószínűség:

c)elsőre „” betűt húzunk? Az első húzás valószínűsége ekkor: , a további két húzáskor pedig minden kedvező, ami nem „” betű, vagyis tehát a valszín:

Megjegyzés: ugyanez a megoldás adódik, ha a feladat szövege nem az első, hanem pl. a harmadik húzásra követeli meg az „” karakter húzását.

d)legalább kétszer „” betűt húzunk? A legalább kettő „” betű esetvizsgálatot feltételez, ha pontosan „” karaktert húztunk, ekkor (ismétlés nélküli kombinációval számolhatjuk ki, hogy a három húzás közül melyik az a kettő, amikor ténylegesen „” karaktert választottunk), ezt féleképp tehetjük meg, így „” karakter húzásának valószínűsége: . Másik lehetőség, ha mindhárom karakter „” betű, ennek valószínűsége:

. Mivel a két eset között „vagy” kötőszó szerepel, így a valszín: .

Az utolsó alapvető valószínűség számítási feladat típus, a geometriai valószínűség meghatározása. A hétköznapi szituáció, pl. a darts játék, amelynél egy kör alakú céltáblára dobunk. Az ilyen feladatokban a keresett valószínűség értelmezésekor a hányadost alakban értelmezzük. (Valamint minden esetben feltételezzük, hogy a céltáblát eltaláljuk.)

11.Feladat: Egy átmérőjű kör alakú céltábla legbelső, legtöbb pontot érő belső köre kerületű kör. Mekkora valószínűséggel találjuk el ezt a legbelső kört?

Megjegyzés: ha egymás után háromszor is dobunk a táblára (és feltételezzük, hogy mindegyik dobásunkkal eltaláljuk a táblát) kört: .

12.Feladat: Egy átmérőjű kör alakú céltábla legbelső, legtöbb pontot érő belső körét eséllyel találjuk el. Mekkora ennek a belső körnek a sugara? A megoldandó egyenlet: amiből: .

Megjegyzés: a feladat szövegezése természetesen reláció megadásával (kisebb, kisebb vagy egyenlő mint=legfeljebb, nagyobb, nagyobb vagy egyenlő mint=legalább) fogalmakat is alkalmazhat. Pl.: Legfeljebb mekkora a legbelső, legtöbb pontot érő kör sugara, ha azt legfeljebb eséllyel találjuk el? Az ilyen esetben nem egyenletet, hanem egyenlőtlenséget oldunk meg és abból vonjuk le a megfelelő következtetést.

Ebből: . (A kapott egyenlőtlenség tényleges megoldása: de ilyenkor eltekintünk a negatív előjelű lehetséges megoldáshalmaztól és úgy vonjuk le a következtetést: .